

تقنيات رياضية في محاكاة استجابة نظام ديناميكي لشروط ابتدائية باستخدام نموذج فضاء الحالة و تحويلات لابلاس

محمد خير عبدالله محمد

(كلية الهندسة ، جامعة المنارة

البريد الإلكتروني: mohamad.kheir@manara.edu.sy)

المخلص

يمثل نموذج فضاء الحالة State Space أحد تقنيات محاكاة النظم الديناميكية التي تخضع لأكثر من دخل و لديها أكثر من خرج ، و يقوم على مبدأ تحويل نظام ديناميكي من المرتبة n إلى نظام ديناميكي مكون من n معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ، و هو ما يجعله أداة نمذجة عابرة للنظم الديناميكية تمثل وصفاً متكاملًا للنظام المعطى .

عند محاكاة نظام يخضع لشروط ابتدائية فقط يكون من الضروري تحويله إلى نظام بدخل محدد يعطي نفس الخرج الذي يعطيه تحت تأثير الشروط الابتدائية ، و لمعالجة هذه المشكلة يمكن الاستفادة من البيئة الرياضية التي يوفرها نموذج فضاء الحالة .

في هذا المقال تم تطوير طريقة رياضية لتحويل نظام ديناميكي يخضع لشروط ابتدائية فقط إلى نظام ديناميكي بدخل خطوي واحد ، بحيث يعطي نفس الخرج الذي تعطيه الشروط الابتدائية ، و ذلك بالاستفادة من تحويلات لابلاس المباشرة و العكسية ، و العلاقة بين دالتا ديراك دلتا و هيفيسايد ، حيث تم تنفيذ المحاكاة باستخدام Matlab/Simulink ، و تمت مقارنة النتائج للتحقق من صحة الطريقة المقترحة .

كلمات مفتاحية : State Space ، النظام الديناميكي ، شروط ابتدائية ، تحويلات لابلاس ، دالة ديراك دلتا ، دالة هيفيسايد ، Matlab/Simulink .

1. مقدمة

بفرض نظام ديناميكي من الرتبة n ، يخضع لإشارات دخل عددها r ، و لديه استجابات عددها m ، في هذه الحالة يمكن تمثيل النظام باستخدام نموذج فضاء الحالة بالشكل التالي [1] :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

حيث :

x : شعاع الحالة أبعاده $(n,1)$

A : مصفوفة الحالة أبعادها (n,n)

B : مصفوفة الدخل أبعادها (n,r)

u : شعاع الحالة أبعاده $(r,1)$

y : شعاع الخرج أبعاده $(m,1)$

C : مصفوفة الخرج أبعادها (m,n)

D : مصفوفة الانتقال المباشر (m,r)

حين يكون النظام الديناميكي من رتب عليا ، و تؤثر عليه مداخل متعددة ، و لديه مخارج متعددة ، يصبح تمثيله بنموذج تابع النقل أكثر تعقيداً ، على اعتبار أن تابع النقل يربط بين خرج محدد و دخل محدد . من هنا تم اقتراح نموذج رياضي لوصف أكثر تفصيلاً للنظم الديناميكية متعددة المداخل و المخارج ، يسمى نموذج فضاء الحالة State Space ، و الذي يقوم بتحويل نظام ديناميكي من الرتبة n إلى جملة معادلات تفاضلية عددها n من الرتبة الأولى ، علماً أن رتبة النظام الديناميكي هي مجموع رتب المعادلات التفاضلية التي تعبر عنه .

من الواضح أنه بتطبيق تحويل لابلاس على معادلة الحالة ، و من ثم تطبيق تحويل لابلاس العكسي سيظهر شعاع الشروط الابتدائية في العلاقة .

بتعريف متغير جديد كما يلي :

$$\dot{z} = x$$

عندئذ فإن المعادلة الناتجة عن تطبيق تحويل لابلاس العكسي تصبح بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + x(0)\delta(t) \\ \dot{z} &= Az + x(0)1(t) = Az + Bu \end{aligned}$$

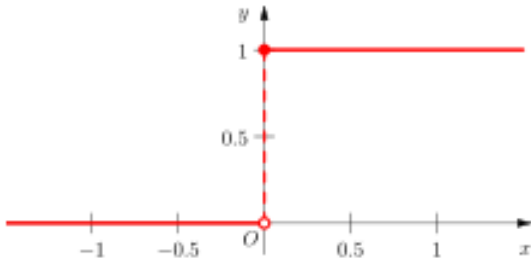
حيث :

$$B = x(0) \quad u = 1(t)$$

على اعتبار أن تكامل دلة ديرك دلتا هي الدالة الخطوية الواحدة (دالة هيفيسايد $H(t)$) ، و التي يعبر عنها رياضياً كما يلي [4] :

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t > 0 \\ 0 & \text{if } t \leq 0 \end{cases}$$

و التي يمكن تمثيلها كما هو مبين في الشكل 2 :



الشكل 2. دالة هيفيسايد

بالعودة إلى معادلة الحالة للنظام :

$$\dot{x} = \dot{z} = Az + Bu$$

بحل هذه المعادلة تنتج استجابة النظام للشروط الابتدائية . و بالتالي إن استجابة النظام للشروط الابتدائية تنتج بحل نموذج فضاء الحالة التالي :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Bu \\ x &= Az + Bu \end{aligned}$$

بمحاكاة النموذج الناتج باستخدام Matlab و Simulink تنتج استجابة النظام ، و التي تمثل استجابة النظام لدخل خطوي واحد ، و هي مطابقة لاستجابة النظام الأصلي الخاضع لشروط ابتدائية فقط بدون دخل خارجي .

تسمى المعادلة الأولى معادلة الحالة ، و تسمى المعادلة الثانية معادلة الخرج .

عندما يخضع النظام لشروط ابتدائية فإن تحليل استجابته بهدف التحكم فيها مثلاً يتطلب تحويل النظام إلى شكل آخر يؤثر عليه دخل محدد ، لذا تصبح المسألة إيجاد النموذج الرياضي لعملية التحويل ، حيث يمكن الاستفادة من تحويلات لابلاس المباشرة و العكسية في هذا المجال .

II. نموذج تحويل استجابة نظام ديناميكي لشروط

ابتدائية إلى استجابة لدخل خطوي واحد:

يمكن التعبير عن نظام ديناميكي يخضع لشروط ابتدائية وفق نموذج فضاء الحالة بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x} &= Ax \end{aligned}$$

للحصول على استجابة هذا النظام $x(t)$ للشروط الابتدائية المطبقة بفرض عدم وجود إشارة دخل مطبقة على النظام يمكن تطبيق تحويل لابلاس على معادلة الحالة بالشكل التالي [2] :

$$sX(s) - x(0) = AX(s)$$

$$sX(s) = AX(s) + x(0)$$

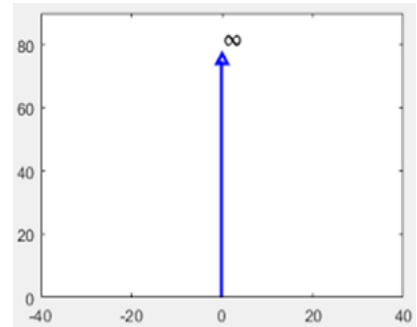
بتطبيق تحويل لابلاس العكسي على العلاقة السابقة [3] :

$$\dot{x} = Ax + x(0)\delta(t)$$

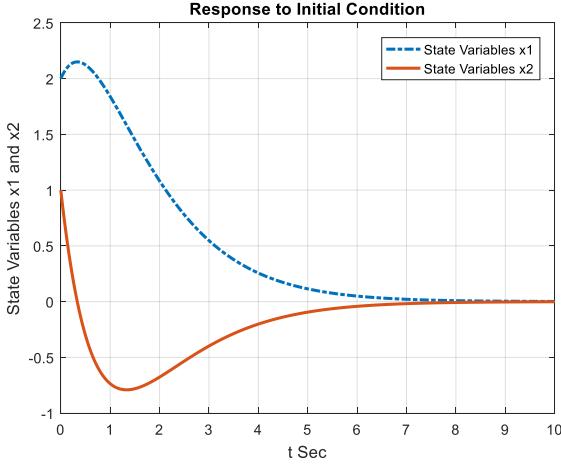
حيث δ دالة ديرك دلتا و التي يعبر عنها كما يلي [4] :

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{if } t = 0 \\ 0 & \text{if } t \neq 0 \end{cases}$$

و التي يمكن تمثيلها كما هو مبين في الشكل 1:



الشكل 1. دالة ديرك دلتا



الشكل 3. استجابة النظام المعدل للدخل الخطوي الواحد

للتحقق من أن هذه الاستجابة تمثل الاستجابة الأصلية بتأثير الشروط الابتدائية فقط يمكن استخدام الأمر initial من خلال الكود البرمجي التالي :

```
t = 0:0.01:10;
A = [0 1;-1 -2];
B=[0;0];
C=[1 0;0 1];
D=[0;0];
[x,y,t] = initial(A,B,C,D,[2;1],t);
x1 = [1 0]*x';
x2 = [0 1]*x';
plot(t,x1,'-.',t,x2,'-',
'LineWidth',2)
grid
legend('State Variables x1','State
Variables x2')
title('Response to Initial
Condition')
xlabel('t Sec')
ylabel('State Variables x1 and x2')
```

و يكون الخرج كما هو مبين في الشكل 4 :

III. المحاكاة باستخدام ماتلاب سيمولنك:

تم تنفيذ الطريقة المقترحة على نظام ديناميكي معطى بصيغة نموذج فضاء الحالة بالشكل التالي :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

من خلال تحويل النظام إلى نظام بدخل خطوي واحد وفق الطريقة المقترحة يصبح نموذج فضاء الحالة للنظام بالشكل التالي :

$$\dot{z} = Az + Bu$$

$$x = Az + Bu$$

حيث :

$$B = x(0) \quad u = 1(t)$$

و الذي يمكن محاكاته باستخدام Matlab من خلال الأمر step ، و الذي يعطي استجابة النظام الديناميكي من أجل دخل خطوي واحد ، كما هو موضح بالكود البرمجي التالي :

```
clc
clear
t = 0:0.01:10;
A = [0 1;-1 -2];
B = [2;1];
[x,z,t] = step(A,B,A,B,1,t);
x1 = [1 0]*x';
x2 = [0 1]*x';
plot(t,x1,'-.',t,x2,'-',
'LineWidth',2)
grid
legend('State Variables x1','State
Variables x2')
title('Response to Initial
Condition')
xlabel('t Sec')
ylabel('State Variables x1 and x2')
```

و يكون الخرج كما هو مبين في الشكل 3 :

يمكن إجراء تعديل آخر على الطريقة المقترحة كما يلي [3] :
على اعتبار أن معادلة الخرج y لنظام ديناميكي يخضع لشروط ابتدائية فقط تعطى بالعلاقة التالية :

$$y = Cx$$

و لكن :

$$\dot{z} = x$$

بالتعويض في معادلة الخرج :

$$y = CAz + CBu$$

و بالتالي يصبح فضاء الحالة كما يلي :

$$\dot{z} = Az + Bu$$

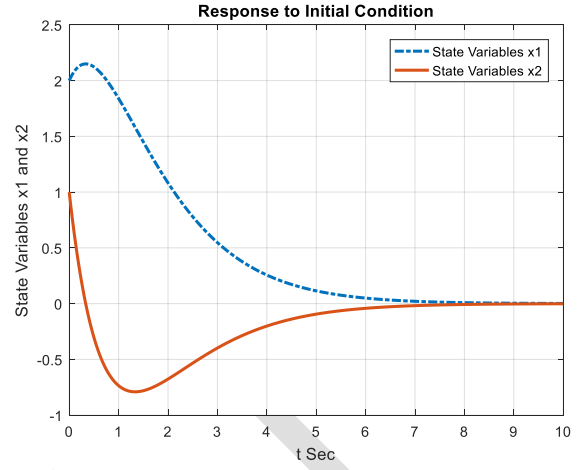
$$y = CAz + CBu$$

حيث يمكن محاكاة هذا النموذج باستخدام Matlab و Simulink بذات الطريقة السابقة .

تم تنفيذ المحاكاة للنظام الديناميكي الجديد لمعرفة استجاباته في هذه الحالة ، و ذلك من خلال الكود التالي بلغة Matlab :

```
t = 0:0.01:10;
A = [0 1;-1 -2];
B = [2;1];
C=[1 0;0 1];
[y,z,t]=step(A,B,C*A,C*B,1,t);
y1 = [1 0]*y';
y2 = [0 1]*y';
plot(t,y1,'-.',t,y2,'-',
'LineWidth',2)
grid
legend('State Variables x1','State
Variables x2')
title('Response to Initial
Condition')
xlabel('t Sec')
ylabel('State Variables x1 and x2')
```

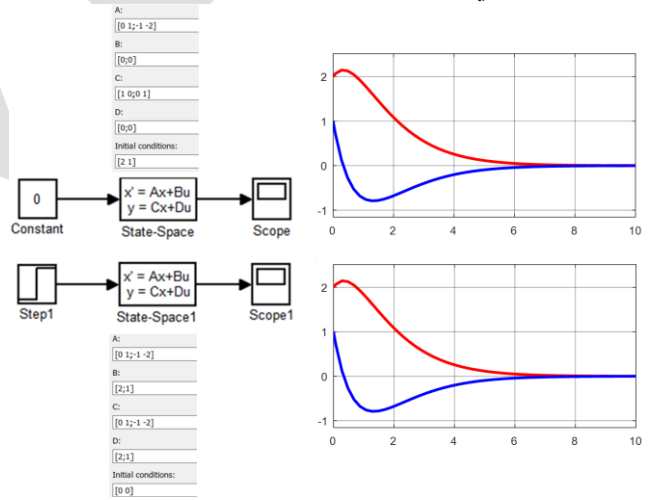
حيث يبين الشكل 6 نتائج المحاكاة .



الشكل 4. استجابة النظام الأصلي للشروط الابتدائية

بالمقارنة بين منحنيات الشكلين 3 و 4 يتضح التطابق التام بين الاستجابات في الحالتين .

يمكن تنفيذ المحاكاة باستخدام Simulink من خلال بلوك محاكاة نموذج فضاء الحالة ضمن مكتبة Continuous الفرعية ، عبر إدخال المصفوفات A B C D وفق الطريقة المقترحة ، حيث أصبحت مصفوفة الدخل B عبارة عن متجه الشروط الابتدائية x_0 ، و مصفوفة الخرج C هي ذاتها مصفوفة الحالة A ، كما هو موضح في الشكل 5 .



الشكل 5. محاكاة الاستجابات للنظام الأصلي و المعدل باستخدام

Simulink

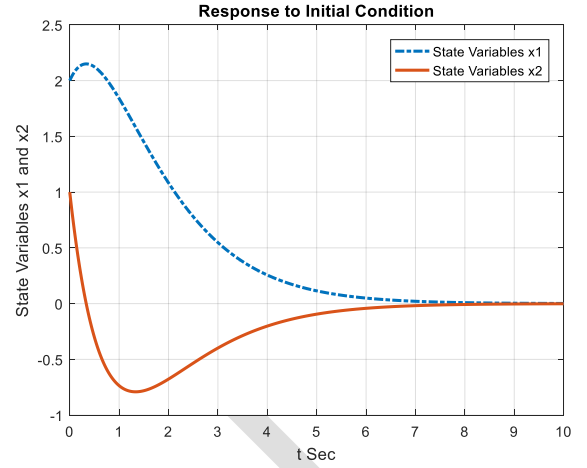
حيث تظهر المحاكاة باستخدام Simulink تطابق النتائج بين الحالتين .

المراجع:

- [1]. Thierry Miquel. State Space Modelling. Master. ENAC, France. 2021.ffhal-02987750v2
- [2]. Rowell, Derek. "2 . 14 Analysis and Design of Feedback Control Systems State-Space Representation of LTI Systems." (2002).
- [3]. Ogata, Katsuhiko. Modern Control Engineering. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall, 1997. Print.
- [4]. Karris, S. T. (2014). Signals and Systems: With MATLAB Computing and Simulink Modeling. Fremont: Orchard Publications.

منشورات المؤلف:

- [1]. Mohamad, M. (2012). Developing of a Thermal Model for a Residential Room Using Simulink/ MATLAB. p. 157-160.
- [2]. Mohamad, M. (2012). Design a Simplified Model of HVAC System Within a Residential Building by Using MATLAB/ SIMULINK. *The International Building Performance Simulation Association* -p. 93-98.
- [3]. Mohamad, M. WEISMANOVÁ, J. (2014). Modelovanie vetracích systémov s konštantným prietokom vzduchu a systémov riadených skutočnou potrebou v programe MATLAB/ Simulink. *TZB-Vol. 2014, No. 17.03. 2014, p. 1-7. ISSN: 1801-4399.*
- [4]. Mohamad, M. (2014). Modelling indoor temperature by combining TRNSYS and MATLAB/SIMULINK, Vol. 2014, No. 26.05. 2014, p. 1-11. ISSN: 1801-4399.
- [5]. Mohamad, M. (2018). Modelling and control of Indoor Temperature using State Space and Transfer Function Models with Matlab/Simulink. Vol. 2018, No. 28.08. 2018, p. 1-10. ISSN: 1801-4399.
- [6]. Mohamad, M. Mathematical Modeling Applications in Predicting the Spread of Epidemics (Covid 19). *Syrian Computer Society journal*, Vol. 2020, No. 152.
- [7]. Mohamad, M. Mathematical Modeling of the Spread of Covid 19 Epidemic with the Impact of Quarantine and Social Distancing and Simulation using Computer. *Manara University journal*, Vol. 2021, No.1.
- [8]. Mohamad, M. Numerical Simulation of Prediction Models of Tumors. *Manara University journal*, Vol. 2021, No. 2.
- [9]. Mohamad, M. Simulation and Analysis of the Mathematical Model of Herd Immunity. *Manara University journal*, Vol. 2021, No. 3.
- [10]. Mohamad, M. Simulation and Analysis of the Mathematical Model of the Relationship between Predator and Prey in Biological Systems. *Manara University journal*, Vol. 2021, No. 4.



الشكل 6. استجابة النظام الجديد للدخل الخطوي الواحد

تظهر نتائج المحاكاة تطابق مخرجات النظام مع النظام الأصلي الخاضع للشروط الابتدائية و مع النظام المعدل بالطريقة الأولى الخاضع لدخل خطوي واحد .

IV. الاستنتاجات:

1. تمثيل نظام ديناميكي بنموذج فضاء الحالة يعطي وصفاً شاملاً لمدخلات و مخرجات النظام ، و العلاقة بينها .
2. إن استجابة نظام ممثل بنموذج فضاء الحالة عند تطبيق شروط ابتدائية تكافئ استجابة نظام معدل بدخل خطوي واحد .
3. تمكن تحويلات لابلاس المباشرة و العكسية لعلاقة معادلة الحالة ، و من خلال العلاقة بين دالة ديرك دلتا و دالة هيفيسايد ، من تطوير النموذج الرياضي المعدل الذي تكافئ استجابته الخطوية الواحدية لاستجابة النظام الأصلي للشروط الابتدائية .
4. إن محاكاة الطريقة المقترحة لتحويل استجابة نظام تحت تأثير شروط ابتدائية إلى استجابة نظام تحت تأثير دخل خطوي واحد باستخدام Matlab و Simulink تعطي تطابقاً في النتائج بين مخرجات النظام الأصلي و النظام المعدل ، و هو ما يثبت صحة الطريقة المقترحة .

- [11]. Mohamad, M. Modeling and Simulation of Vehicles Motion with Control using MATLAB/SIMULINK. *Syrian Computer Society journal*, Vol. 2022, No. 161.

MANARA