

بعض تطبيقات الاشتقاق الكسري

أ.د. سامي انجرو

(قسم الرياضيات ، جامعة تشرين

البريد الإلكتروني: s.injrou@tishreen.edu.sy)

الملخص

يهدف هذا المقال إلى استعراض مفاهيم حساب التفاضل والتكامل الكسري من الناحية الرياضية، بالإضافة إلى عرض بعض تطبيقاته في مجال الفيزياء والتحكم والدوائر الكهربائية والطب، إذ نقدم بعض الملخصات القصيرة التي كتبها باحثون متميزون. يتبين من كل ذلك أهمية هذا الفرع الحديث من فروع الرياضيات ويعتقد أن يكون له تطبيقات أكثر تعقيداً ستغير المستقبل.

كلمات مفتاحية – حساب التفاضل والتكامل الكسري، الدوائر المتماثلة، التحكم، نظام تحديد المواقع.

1. مقدمة

فقط بحالته السابقة كما في الاشتقاق الكلاسيكي المؤلف، بل بجميع الحالات السابقة على مجال زمني قد يشمل كامل تاريخ حالة النظام [2]، ودعيت هذه الحالة الخاصة بسلوك الذاكرة الطويلة [3].

لقد ازداد دور حساب التفاضل والتكامل الكسري بسبب تطبيقاته الواسعة في مختلف المجالات التطبيقية بما في ذلك انتشار المجتمعات البيولوجية ومعالجة الإشارة وفيزياء البلازما والألياف الضوئية وفيزياء الحالة الصلبة والشبكات الكهربائية والتحكم [3-8].

قدم العديد من الرياضيين تعاريف مختلفة للاشتقاق من مراتب كسرية أشهرهم ريمان - ليوفيل، كابوتو، جرونوالد-لينيكوف، هادمارد، كوبر، وريس [9-12]، لكن المشكلة أن معظم هذه الأنواع لا تحقق الصيغ الكلاسيكية للاشتقاق مثل قاعدة الضرب وقاعدة القسمة وقاعدة السلسلة (انظر [13] على سبيل المثال). ظهر مؤخراً تعاريف تحقق الخواص السابقة أمثال المشتق الكسري المحافظ (Conformable) [14] وغير المحافظ (nonconformable) [15,16].

يعد الاشتقاق من المفاهيم الهامة في الرياضيات وكذلك العلوم التطبيقية بمختلف مجالاتها، إذ له أهمية كبيرة في نمذجة الظواهر الطبيعية المتغيرة. تعود هذه الأهمية إلى الارتباط الوثيق بين مفهومه ومفهوم التغير، فمثلاً، يقترن مفهوم المشتق من المرتبة الأولى بسرعة التغير في النظام الديناميكي، والمشتق من المرتبة الثانية بتسارع ذلك التغير، بينما المشتق من المرتبة الثالثة بالارتجاج (jerk) معدل تغير التسارع. نلاحظ دوماً أن مرتبة الاشتقاق تأخذ قيمة طبيعية، لكن كان هناك سؤال آخر يدور في رأس الرياضيين وهو "هل يمكن أن تكون هذه المرتبة قيمة حقيقية، أي هل يمكن أن يكون لدينا $d^{1/2}y/dx^{1/2}$ ؟"، إذ كان هذا السؤال في رسالة مرسلة من l'Hopital عام 1695 إلى Leibniz [1]، وكان الجواب "هذه مفارقة واضحة، سيستخلص منها يوماً ما نتائج مفيدة".

بقي مفهوم الاشتقاق من مراتب كسرية حبيس الرياضيات النظرية بسبب تعقیده وعدم إيجاد تفسير فيزيائي مباشر له، واستمر ذلك حتى ظهر في نمذجة الظواهر الديناميكية غير المحلية وهي الظواهر التي يكون فيها تغير حالة النظام الديناميكي ليس متعلقاً

بفرض أن $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ تابع مستمر، لكن ليس من الضروري أن يكون قابل للمفاضلة، عندئذ يعرف المشتق الكسري المحافظ للتابع f من المرتبة α بالعلاقة الآتية:

$$T_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \quad (5)$$

أيًا كانت $t > 0$ و $\alpha \in (0, 1)$. إذا كان f تابع α - قابل للمفاضلة في مجال ما $(0, a)$ مع $a > 0$ والنهائية $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ موجودة، عندئذ $f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$.

ج. الاشتقاق الكسري غير المحافظ

قدم *Napoles Valdes* وآخرون في [15] تعديل للتعريف المعطى بالعلاقة (5)، وأسموه بالاشتقاق الكسري غير المحافظ، وهو كما يأتي:

بفرض أن $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ تابع مستمر، عندئذ يعطى الاشتقاق من النوع N من المرتبة α بالعلاقة:

$$N^{\alpha} f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon e^{t-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \quad (6)$$

وذلك من أجل $t > 0$ و $\alpha \in (0, 1)$.

في التعريفين السابقين في العلاقات (5) و (6)، إذا كانت $\alpha = 1$ ، نحصل على الاشتقاق الكلاسيكي المعروف.

III. تطبيقات الاشتقاق الكسري [18]

سنعرض فيما يأتي بعض تطبيقات الاشتقاق الكسري

أ. الفيزياء

إن العديد من الأنظمة المركبة، مثل السائل داخل الخلايا البيولوجية والمواد البوليميرية المنصهرة، أو الأغشية ثنائية الصبغة الدهنية تكون لزجة، وتبعاً للتردد الذي يتم من خلاله فحص هذه الأنظمة، تكون استجابتها أكثر مرونة أو أكثر لزوجة. تأخذ جسيمات التتبع في هذه السوائل المركبة سلوكاً شاذاً، إذ تنتشر جزيئات المادة بحيث يكون متوسط مربع الازاحة عن مركز الانتشار متناسب مع قوى كسرية بالنسبة للزمن $t^{\alpha} < r^2(t)$ ، حيث يكون لدينا انتشار منخفض

نستعرض في هذا المقال بعض تعريف الاشتقاق الكسري وبعض التطبيقات في مجالات مختلفة من خلال عرض بشكل مختصر لبعض مساهمات كتبها باحثون مرموقون.

II. تعريف مختلفة للاشتقاق الكسري

سنورد فيما يأتي أهم تعريف الاشتقاق الكسري:

أ. اشتقاق ريمان-ليوفيل - الكسري [17]

لتكن f دالة حقيقية معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ و $t > 0$ و $0 < \alpha < 1$ ، عندئذ يعطى مشتق ريمان-ليوفيل الكسري للدالة f من المرتبة α بالعلاقة الآتية:

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-\zeta)^{-\alpha} f'(\zeta) d\zeta \quad (1)$$

لكن إذا كان $f(x) = k$ ثابت فإن:

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{kx^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \neq 0 \quad (2)$$

حيث $\Gamma(x)$ تابع غاما المألوف:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (3)$$

لذلك قدم *Jumarie* تعديل لهذا التعريف في [17]:

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\zeta)^{-\alpha} (f(\zeta) - f(0)) d\zeta \quad (4)$$

من أجل $0 < \alpha < 1$.

وتحقق بذلك أن مشتق الثابت يساوي الصفر، لكن لم يحقق بعض الخواص مثل خاصية قاعدة السلسلة انظر المرجع [13].

ب. الاشتقاق الكسري المحافظ

قدم مؤخراً *Khalil* وآخرون في [14] تعريف مختلف للاشتقاق الكسري يشبه الاشتقاق الكلاسيكي ويحقق جميع خواص الاشتقاق الكلاسيكي:

subdiffusion من أجل $0 < \alpha < 1$ ، وانتشار فائق
superdiffusion من أجل $\alpha > 1$ [19]. توصف هذه الحركة
في الانتشار، رياضياً، بمعادلة Langevin ذات
الاشتقاق الكسري [19]. كما ثبت أن الكاشفات داخل الخلايا
البيولوجية أو في السوائل المركبة ومكونات الأغشية البيولوجية
تظهر هذا النوع من الحركة اللزجة المرنة [20-22].



تتطلب تقنية الممانعة الطيفية الكهربائية دوراً مهماً من وجهة النظر التجريبية للحصول على معلومات حول الخصائص الكهربائية للعديد من المواد المختلفة ولاسيما السوائل [23]. يتم التحقق من ذلك نظرياً باستخدام نموذج الانتشار لـ Poisson-Nernst-Planck [24] و/أو الدارات المكافئة. في حد التردد المنخفض، تعد هذه الأساليب مع اعتبارات بسيطة (كالشروط الحدية و/أو عناصر الدارة) غير قادرة على وصف السلوك التجريبي، وإن هذه الخلافات تكون ملاحظة فقط بشكل خاص في حد التردد المنخفض [24،25]. مع ذلك من خلال استخدام أدوات حساب التفاضل والتكامل الكسري وبإجراء تغييرات مناسبة على الشروط الحدية من الممكن التغلب على هذه المشكلة ووصف السلوك التجريبي في جميع نطاقات التردد [26،27]. علاوة على ذلك يمكن استخدام هذا النهج للبحث في انتشار الأيونات في خلية كهربائية من خلال الناقلية الكهربائية التي ترتبط مباشرة بمتوسط كرم الازاحة.

ت. الدارة المتماثلة

يمكن استخدام خاصة التكامل الكسري على التسلسل في الدارات المتماثلة:

$${}_a I_t^\alpha {}_a I_t^\beta {}_a I_t^\gamma f(s) = {}_a I_t^{\alpha+\beta+\gamma} f(s) \quad (7)$$

حساب	حل	المعادلة	التفاضلية
الكسرية	$\rho y^{(\delta)}(t) = f(t) - \kappa y(t)$	حيث ρ و κ محددة	بتوابت القياس المحسوبة من الممانعة الطيفية للمعاملات المستخدمة في الحسابات الفيزيائية. يوضح الشكل (1) مخطط تنفيذ دارة من أجل $\delta = 0.3 + 0.5 + 1.0$ ، وتم اختبار

الشكل 1 . مخطط دائرة حيث $\alpha_{F1} = 0.3$ و

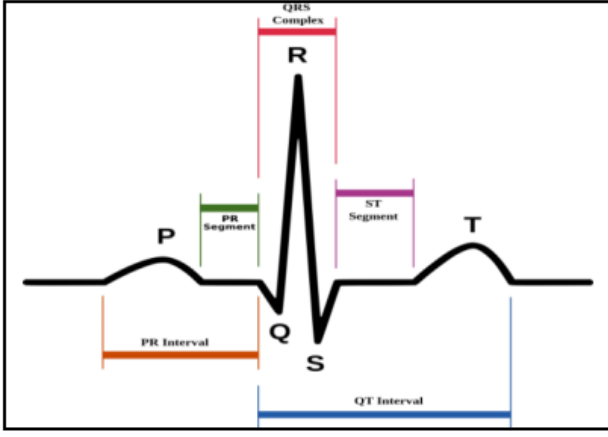
ليعطي مرتبة كسرية كلية $\beta_{F_2} = 0.5, \gamma_{c1} \approx 1.0$
 $\delta = 1.8$

ث. التحكم

يتم استخدام المرتبة الكسرية في التحكم كما في حالة نظام تحديد المواقع الجوي (air-based precision positioning system).

تعد الدقة وعرض النطاق الترددي (bandwidth) واستقرار الحركة من أهم مؤشرات الأداء لأي نظام حركة. لقد أثبت المتحكم PID ذو المرتبة الكسرية (PID: Proportional-integral-derivative controller) أنه فعال للغاية لتحسين الأداء، إذ استخدم Krijinen وآخرون في [29] حساب التفاضل والتكامل الكسري للتحكم في منصة تحديد المواقع بدقة. إذ تم في هذا البحث تصميم نظام تحديد المواقع اللائق من عن طريق تعويم رقاقة سيليكون على طبقة رقيقة من الهواء (انظر الشكل (2)). تم التحكم بالنظام كما هو موضح بالشكل (3)، إذ تم تصميم جهازي تحكم متتاليين بمدخل واحد/مخرج واحد (SISO). لقد ثبت أنه تم زيادة عرض النطاق الترددي لنظام كتلة - ربيعة منتظم باستخدام معوض كسري رئيسي.

بالإضافة إلى ذلك فقد تم اثبات أن مثل هذه الكتلة المتحركة تنصرف أساساً بشكل كسري، وباستخدام الكسور فقط يتم تمديد عرض النطاق الترددي بنسبة 14.6% و 62% للحلقتين الداخلية



الشكل 4 . شكل طبيعي لموجة PQRST في مخطط تخطيط القلب.

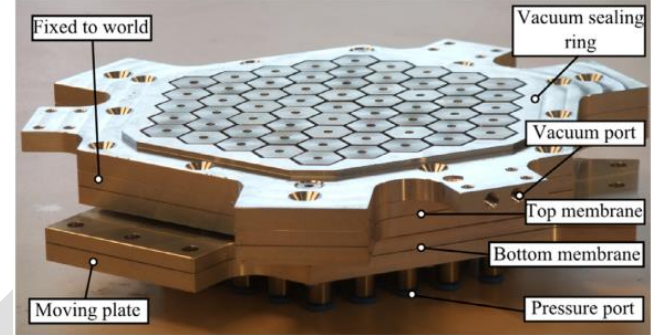
IV. الاستنتاجات

تم في هذا المقال تناول بعض تعاريف الاشتقاق من مراتب كسري، كما تم عرض بعض التطبيقات في مجالات مختلفة، وتبين من كل ذلك الأهمية الكبيرة لهذا الفرع الحديث من الرياضيات، لذلك نأمل أن توجه هذه المعلومات المتواضعة التي قدمناها في هذا المقال الباحثين الشباب، وأن تجذب انتباههم لرؤية بعض تطبيقات هذا العلم الحديث في العالم الحقيقي وأن تكسبهم فهماً أفضل لهذه الأداة الرياضية القوية.

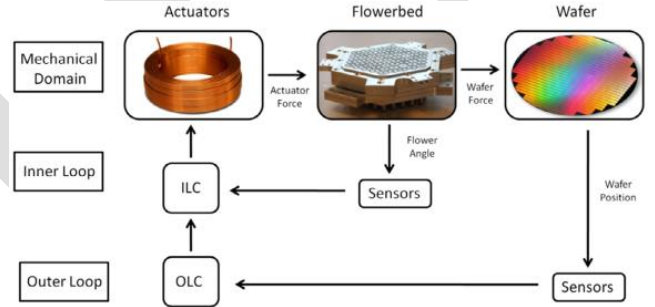
المراجع:

- [1]. K.S. Miller and B. Ross, "An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations", Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York. 1993.
- [2]. L. Vazquez, "A Fruitful Interplay: From Nonlocality to Fractional Calculus, in: Nonlinear Waves Class." Quantum Asp., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004, pp. 129-133.
- [3]. J. Sabatier, C. Farages and V. Tartaglian, "Some Alternative solutions to fractional models for modelling power law type long memory behaviours." Mathematics. Vol 8, 2020.
- [4]. I. Podlubny, "Fractional Differential Equations", Academic, San Diego, CA, 1999.
- [5]. F.S. Mozaffari, H. Hassanabadi, H. Sobhani and W.S. Chung, "On the Conformable Fractional Quantum Mechanics", J. Kor. Phys. Soc, 2017.
- [6]. W.S. Chung, S. Zare, and H. Hassanabadi, "Investigation of Conformable Fractional Schrodinger Equation in Presence of Killingbeck and Hyperbolic Potentials", Commun. Theor. Phys. 67 (3), pp 250-254, 2017.

والخارجية على الترتيب. فضلاً عن ذلك، يتم جعل عرض النطاق الترددي للحلقة المغلقة لتحديد المواقع للرقاقة 60 هرتز، مما يؤدي إلى خطأ تحديد الموقع يبلغ 104 نانومتر، والذي يأتي من ضجيج المستشعر واضطرابات الضغط.



الشكل 2 . نظرة عامة على منصة تحديد المواقع بدقة المعتمد على الهواء المصممة من قبل TU Delft.



الشكل 3 . استراتيجية التحكم المقترحة، مع حلقة تحكم داخلية (ILC) وحلقة تحكم خارجية (OLC).

ج. الطب

يستخدم حساب التفاضل والتكامل الكسري لمقارنة ECG (Electro-Cardiogram) مخططات تخطيط القلب للمرضى [30]، إذ تكون هذه المخططات على شكل بيان لتتابع مستمرة لكن غير قابلة للمفاضلة في بعض أو في كل النقاط، حيث يفشل حساب التفاضل والتكامل الكلاسيكي في توصيفه لأنه يتعذر إيجاد المشتقات في نقاط الانقطاع، لكن باستخدام حساب التفاضل والتكامل الكسري يمكن إيجاد المشتقات الكسرية في تلك النقاط.

- [21]. J-H. Jeon, H. Martinez-Seara Monne, M. Javanainen, and R. Metzler. "Lateral motion of phospholipids and cholesterol in a lipid bilayer: anomalous diffusion and its origins". Phys Rev Lett 109, 2012.
- [22]. J-H. Jeon, N. Leijnse, L. Oddershede, and R. Metzler. "Anomalous diffusion and power-law relaxation in wormlike micellar solution." New J Phys, 15, 2013.
- [23]. E. Barsoukov, and JR. Macdonald. "Impedance spectroscopy: Theory, experiment, and applications." Wiley; 1987.
- [24]. EK. Lenzi, RS. Zola, R. Rossato, HV. Ribeiro, DS. Vieira, and LR. Evangelista. "Asymptotic behaviors of the Poisson–Nernst–Planck model, generalizations and best adjust of experimental data." Electrochim Acta, 226, 5-40, 2017.
- [25]. EK. Lenzi, MK. Lenzi, S. FRGB, G. Goncalves, R. Rossato, RS. Zola, and LR. Evangelista. "A framework to investigate the immittance responses for finite length-situations: fractional diffusion equation, reaction term, and boundary conditions." J Electroanal Chem, 712, 8-82, 2014.
- [26]. F. Ciuchi, A. Mazzulla, N. Scaramuzza, EK. Lenzi, and LR. Evangelista. "Fractional diffusion equation and the electrical impedance: Experimental evidence in liquid-crystalline cells." J Phys Chem C, 116,7-73, 2012.
- [27]. EK. Lenzi, F. PRG, T. Petrucci, H. Mukai, and HV. Ribeiro. "Anomalous-diffusion approach applied to the electrical response of water." Phys Rev E, 84, 2011.
- [28]. G. Bohannan, B. Knauber. "Physical experimental study of the fractional harmonic oscillator." In: Proceedings of the 2015 international symposium on circuits and systems (ISCAS). Lisbon; 24-27 May. p.p 2341–4, 2015.
- [29]. ME. Krijnen, R. van Ostayen, and SH. HosseinNia. "The application of fractional order control for an air-based contactless actuation system." ISA Trans 2017. <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2017.04.014>
- [30]. S. Sengupta, U. Ghosh, S. Sarkar, and S. Das. "Application of Fractional Derivatives in Characterization of ECG graphs of Right Ventricular Hypertrophy Patients", Submitted on 7 Nov 2017.
- منشورات المؤلف:**
- [1]. Injrou, S., Pierre, M. (2008). Stable discretizations of the Cahn-Hilliard-Gurtin equations. Discrete and Continuous Dynamical Systems. 22(4), pp. 1065-1080.
- [2]. Injrou, S., Pierre, M. (2010). Error estimates for a finite element discretization of the Cahn-Hilliard-Gurtin equations. Advances in Differential Equations, Vol. 15, pp. 1161-1192.
- [3]. Injrou, S., Karroum, R. (2014). Exact Solitary Wave Solutions to Generalized Fitzhugh-Nagumo Equation with Constant Coefficients by Using Exp-function Method. Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies, 36(6):23-35.
- [7]. W.S. Chung, S. Zarrinkamar, S. Zare, H. Hassanabadi, "Scattering Study of a Modified Cusp Potential in Conformable Fractional Formalism", J. Kor. Phys. Soc. 70 (4), pp 348-352, 2017.
- [8]. F.S. Mozaffari, H. Hassanabadi, H. Sobhani, W. S. Chung, "Investigation of the Dirac Equation by Using the Conformable Fractional Derivative". J. Korean Phys. Soc. 72, pp 987–990, 2018.
- [9]. U.N. Katugampola, "New Approach to a Generalized Fractional Integral", Appl. Math. Comput., 218(3), pp 860–865. 2011.
- [10]. U.N. Katugampola, "New Approach to Generalized Fractional Derivatives", B. Math. Anal. App., 6(4), pp 1–15, 2014.
- [11]. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, "Theory and Applications of Fractional Differential Equations", Elsevier B.V., Amsterdam, Netherlands, 2016.
- [12]. S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev, "Fractional Integrals and Derivatives", Theory and Applications, Yverdon, Gordon and Breach, 1993.
- [13]. C. Liu, "Counterexamples on Jumarir's Two- Basic Fractional Calculus Formulae", Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, Vol. 22, pp 92-94, 2015.
- [14]. R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, and M. Sababheh, "A New Definition of Fractional Derivative", J. Comput. Appl. Math., 264, pp 65-70, 2014.
- [15]. J.E. Napoles Valdes, P. M. Guzman and L. Lugo. "Some New results on nonconformable fractional calculus." Advances in Dynamical Systems and Applications, 13(2), 167–175, 2018.
- [16]. P. M. Guzman, G. Langton, L. M Lugo Mota, J. Medina and J. E. Napoles Valdes. "A new definition of a fractional derivative of local type". Journal of Mathematical Analysis, 9(2), 88–98, 2018.
- [17]. G. JUMARIE, "Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions further results." Computers and Mathematics with Applications, 51, pp. 1367–1376. 2006.
- [18]. H. Sun, Y. Zhang, D. Baleanu, W. Chen, and Y. Chen, "A new collection of real-world applications of fractional calculus in science and engineering." Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 64, 213–231, 2018.
- [19]. R. Metzler, J-H. Jeon, AG. Cherstvy, and E. Barkai, "Anomalous diffusion models and their properties: Non-stationarity, non-ergodicity, and ageing at the centenary of single particle tracking." Phys Chem Chem Phys, vol 16, 2014.
- [20]. J-H. Jeon, V. Tejedor, S. Burov, E. Barkai, C. Selhuber-Unkel, K. Berg-Sørensen, L. Oddershede, and R. Metzler. "In vivo anomalous diffusion and weak ergodicity breaking of lipid granules." Phys Rev Lett, 106, 2011.

- [15]. Injrou, S., Mahmoud, S., Kassem, A. (2019). A Stable Numerical Scheme for Fitzhugh-Nagumo Time-Fractional Partial Differential Equation. *Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies*, 41(4):99-110.
- [16]. Injrou, S. (2019). Finding Exact Solutions for Generalized Benjamin – Bona - Mahony Equation in Variant Exponent with Time-Dependent Coefficients. *Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies*, 41(5):9-22.
- [17]. Injrou, S., Karroum, R., Moualla, M. (2019). Oscillation Criteria for Second Order Generalized Half-Linear Neutral Differential Equations with Maxima. *Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic sciences Series*, Vol (3) No (3), pp. 109-123.
- [18]. Injrou, S., Karroum, R., Hilal, N. (2019). Numerical Study of Newell-Whitehead-Segel Partial Differential Equation by Exponential Finite Difference Method. *Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic sciences Series*, Vol (3) No (4) pp.109-121.
- [19]. Hilal, N., Injrou, S., Karroum, R. (2020). Exponential finite difference methods for solving Newell–Whitehead–Segel equation. *Arabian Journal of Mathematics*, 9(2).
- [20]. Injrou, S. (2020). Exact Solutions for the Conformable Space-Time Fractional Zeldovich Equation with Time-Dependent Coefficients. *International Journal of Differential Equation*, pp1-6.
- [21]. Injrou, S. (2020). Finding Various Exact Solutions for Zeldovich Equation in the Sense of Conformable Fractional Derivative with Constant Coefficients. *Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies*, 42(3):11-24.
- [22]. Injrou, S., Karroum, R., Moualla, M. (2020). Study on Oscillation for Generalized Half Linear Second Order Differential Equations with Delay and Neutral using Riccati Transformation. *Albaath University Journal*, 42(16).
- [23]. Mahmoud, S., Injrou, S., Daher, H. (2020). Numerical Algorithm for Solving Volterra-Fredholm Integro-Differential Equations. *Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies*, 42(5):73-89.
- [24]. Mahmoud, S., Injrou, S., Daher, H. (2020). Numerical Solutions of Fractional Differential Equations and Fractional Volterra Integro-Differential Equations by Spline Functions. *Albaath University Journal*, 42(15).
- [25]. Injrou, S., Karroum, R., Kafa, A. (2021). Numerical Solution for Generalized Fractional Huxley Equation by Using Two Dimensional Haar Wavelet Method. *Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies*, 42(6):73-88.
- [26]. Injrou, S., Karroum, R., Deeb, N. (2021). Various Exact Solutions for the Conformable Time-Fractional Generalized Fitzhugh–Nagumo Equation with Time-
- [4]. Injrou, S., Karroum, R. (2014). Finding Exact Solutions for Generalized Fitzhug- Nagumo Equation with Constant Coefficients. *Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies*, 36(5):49-57.
- [5]. Injrou, S., Karroum, R. (2015). Explicit Exact Traveling Wave Solutions for Generalized Fitzhug- Nagumo Equation with Constant Coefficients by Bernoulli sub-ODE Method. *Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies*, 37(2):59-67.
- [6]. Injrou, S., Karroum, R. (2015). New Exact Solutions for Generalized Fitzhug-Nagumo Equation by Homogeneous balance Method. *Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies*, 37(4):57-65.
- [7]. Injrou, S., Karroum, R. (2016). On Disconjugacy and Oscillation for Generalized Half Linear Second Order Differential Equations with Almost Periodic Coefficients. *Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies*, 38(4).
- [8]. Injrou, S. (2018). A Study about Finding Exact Solutions for Zeldovich Equation with Time-Dependent Coefficients by Using the Tanh Function Method. *Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies*, 40(4):23-32.
- [9]. Injrou, S., Karroum, R., Jendy, K. (2018). Finding Exact Solution For Generalized Burgers-Huxley Equation With Constant Coefficients by the modified (G'/G) expansion method. *Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies*, 40(5):179-187.
- [10]. Injrou, S., Karroum, R., Deeb, N. (2019). Finding Analytical Solutions for The Time-Fractional Generalized Fitzhugh - Nagumo Equation with Constant Coefficients. *Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies*, 41(2):157-168.
- [11]. Injrou, S. (2019). Finding New Exact Solutions for Benjamin – Bona - Mahony Equation with Time-Dependent Coefficients. *Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies*, 41(2):43-52.
- [12]. Injrou, S., Karroum, R., Hilal, N. (2019). Numerical Solution of Newell-Whitehead-Segel Partial Differential Equation by Finite Difference Methods. *Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies*, 41(2):105-118.
- [13]. Mahmoud, S., Injrou, S., Daher, H. (2019). Numerical Solutions of liner Volterra Integro-Differential Equations of second kind by Spline collocation Function. *Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies*, 41(3):127-142.
- [14]. Injrou, S., Karroum, R., Moualla, M. (2019). Oscillation criteria for Generalized Half Linear Second Order Differential Equations with Neutral. *Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies*, 41(4):55-67.

MANA