

نمذجة و محاكاة منحنى الملاحقة Pursuit Curve عددياً باستخدام Matlab

د. محمد خير عبدالله محمد

(كلية الهندسة ، جامعة المنارة)

البريد الإلكتروني: mohamad.kheir@manara.edu.sy

الملخص

إن إيجاد النموذج الرياضي لعملية ملاحقة مفترس لفريسة هي مسألة مهمة في العديد من التطبيقات ، بما فيها التطبيقات العسكرية . قد يمثل منحنى الملاحقة عملية تتبع و مراقبة درون لجسم معين ، أو عملية رصد ينفذها روبوت ، أو ملاحقة طائرة مسيرة لهدف ما . إن جميع التطبيقات السابقة جرى تطوير نماذجها الرياضية من عالم الطبيعة ، من خلال مراقبة مطاردة حيوان مفترس لفريسته ، ثم محاولة تحليل مسار الملاحقة بطريقة رياضية .

في هذا المقال تم تصميم النموذج الرياضي لمنحنى الملاحقة Pursuit Curve بين مفترس و فريسته ، و هو عبارة عن معادلة تفاضلية عادية لا خطية من الرتبة الثانية ، ثم تم حل المعادلة بطريقة رانج كوتا العددية Runge-Kutta من الرتبة الرابعة ، و هي من أهم الطرق العددية المستخدمة في حل المعادلات التفاضلية العادية ، و جرى تنفيذ الطريقة برمجياً باستخدام لغة Matlab ، حيث تبين نتائج المحاكاة كيفية وصول المفترس للفريسة سواء من حيث طبيعة المسار الذي يسلكه ، أو مقدار السرعة المطلوبة لتحقيق ذلك .

كلمات مفتاحية : Pursuit Curve ، معادلة تفاضلية عادية ، طريقة رانج كوتا العددية Runge-Kutta ، Matlab

1. مقدمة

المسار المتبع و شروط تحقق عملية وصول الجسم المهاجم إلى الهدف بدقة .

إن النمذجة الرياضية لمنحنى الملاحقة تتطلب التعامل مع المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية من الرتبة الثانية ، حيث يكون من الصعب عملياً إيجاد الحل الرياضي التحليلي لهذا النوع من النماذج .

تعتبر الطرق العددية إحدى أهم أدوات التعامل مع المعادلات التفاضلية اللاخطية ، و تعد طريقة رانج كوتا Runge-Kutta العددية من الرتبة الرابعة من أهم طرق حل المعادلات التفاضلية العادية ، باعتبارها تأخذ بعين الاعتبار الحدود الخمسة الأولى من منشور تايلور [3] ، مما يجعلها قادرة على الوصول إلى الحل بدقة كافية .

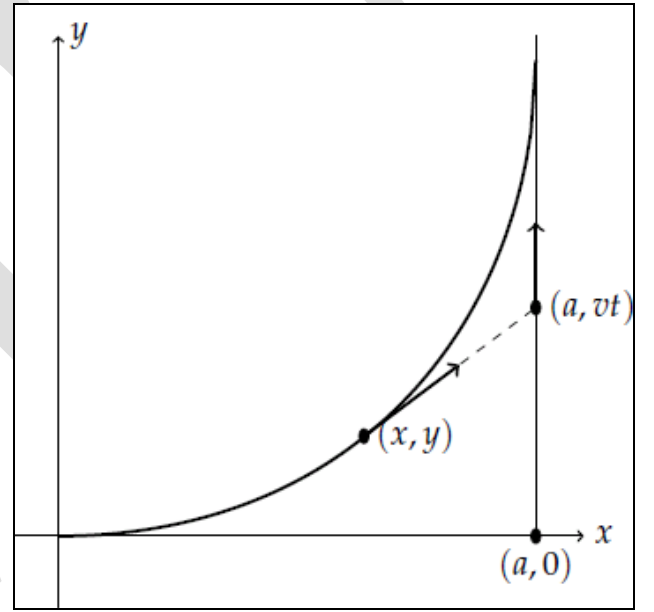
منحنى الملاحقة هو المسار الذي يسلكه جسم معين خلال تتبعه لجسم آخر متحرك . هذه المسألة جرى تناولها بصورة صريحة للمرة الأولى عام 1732 من قبل Pierre Bouguer [1] . أما مصطلح منحنى الملاحقة Pursuit Curve فجرى تقديمه للمرة الأولى عام 1859 من قبل George Boole [2] .

المسار المنحني الذي تسلكه طائرة مهاجمة ، أو سفينة حربية ، على هدف يتحرك بسرعة معينة ، و كذلك المسار الذي يسلكه مفترس للإمساك بفريسته ، جميعها منحنيات ملاحقة .

تقتضي المسألة إيجاد النموذج الرياضي لمسار جسم يتحرك بسرعة معينة للوصول إلى هدف يطارده يتحرك بسرعة ما ، بحيث يغير الجسم المهاجم مساره في كل لحظة باتجاه الهدف . تمكن عملية النمذجة الرياضية لهذه المسألة من تحليل طبيعة

II. النموذج الرياضي لمنحني الملاحقة

بفرض هناك مفترس في الموضع (x, y) ، يشاهد في لحظة معينة فريسة تتحرك بسرعة v بخط مستقيم . يبدأ المفترس بالتحرك نحو الفريسة بسرعة ثابتة w ، و لكن دائماً باتجاه خط النظر بين الموضع اللحظي للمفترس باتجاه فريسته .
ليكن بدء التحرك للمفترس في اللحظة $t=0$ انطلاقاً من الموضع $(0,0)$ ، حيث الفريسة عند هذه اللحظة في الموضع $(a,0)$.
تتحرك الفريسة بخط مستقيم $x=a$ ، لذا فإن موضع الفريسة في أي لحظة زمنية t هو (a,vt) ، كما هو مبين في الشكل 1 .



الشكل 1. شكل تخطيطي لمنحني الملاحقة بين مفترس و فريسة

بهذا الشكل تصبح المسألة إيجاد مسار المفترس $y=f(x)$.
في البدء يجب تحديد معادلة خط النظر بين النقطتين (x,y) و (a,vt) . باعتبار ميل هذا الخط هو ذاته ميل المماس للمسار $y=f(x)$ وفق العلاقة التالية [4] :

$$\dot{y} = \frac{vt - y}{a - x}$$

بما أن المفترس يتحرك بسرعة ثابتة w ، فإن المسافة التي يقطعها هي $L=wt$ ، حيث t زمن التحرك من الموضع الابتدائي .

لكن من ناحية أخرى ، المسافة التي يقطعها المفترس هي طول القوس بين الموضعين $(0,0)$ و (x,y) .
من أجل طول عنصري للقوس مقداره dL :
$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

و بالتالي :

$$\frac{dL}{dx} = \sqrt{1 + [\dot{y}(x)]^2}$$

بإجراء التكامل لطرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج طول المسار كما يلي [4] :

$$L = \int_0^x \sqrt{1 + [\dot{y}(x)]^2} dx$$

بحذف الزمن في العلاقة $L=wt$ بالاستفادة من علاقة ميل خط النظر بين المفترس و الفريسة السابقة تنتج العلاقة التالية [4] :

$$\int_0^x \sqrt{1 + [\dot{y}(x)]^2} dx = \frac{w}{v} (y + (a - x)\dot{y})$$

بتفاضل العلاقة السابقة بالنسبة إلى x ينتج [4] :

$$\sqrt{1 + [\dot{y}(x)]^2} = \frac{w}{v} (y + (a - x)\ddot{y})$$

و هي معادلة تفاضلية عادية لا خطية غير متجانسة من المرتبة الثانية تصف منحني الملاحقة ، و التي بحلها ينتج المسار الذي يسلكه المفترس لبلوغ فريسته .

III. محاكاة منحني الملاحقة باستخدام طريقة رانج كوتا العددية من الرتبة الرابعة

تم تنفيذ المحاكاة لمنحني الملاحقة باستخدام طريقة رانج كوتا العددية (Runge-Kutta) من الرتبة الرابعة لحل المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الثانية ، و التي تقوم بحساب قيمة الحل y_{i+h} للمعادلة عند اللحظة x_{i+h} بالاعتماد على قيمة الحل y_i عند اللحظة السابقة x_i و قيمة الخطوة الزمنية h .

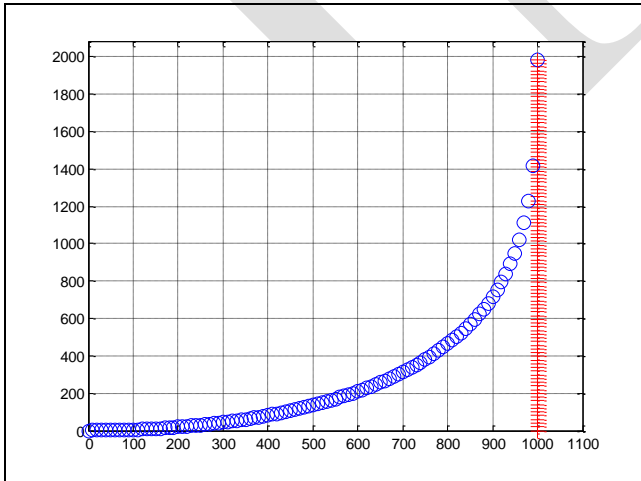
حيث تأخذ طريقة رانج كوتا من الرتبة الرابعة الحدود الخمسة الأولى من من منشور تايلور و تهمل باقي الحدود .
بفرض المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية بالشكل التالي :
$$\ddot{y} = f(x, y, \dot{y}) \quad y(0) = \alpha, \dot{y}(0) = \beta$$

```
V(i+1)=V(i)+(1/6)*(m1+2*m2+2*m3+m4)*h;
X(i+1)=X(i)+h;
end
```

مع استخدام واجهة إدخال على شكل نافذة مصفوفية تتضمن بارامترات الإدخال لعملية المحاكاة ، كما في الشكل 2 .

الشكل 2. نافذة بارامترات الإدخال إلى نموذج المحاكاة بلغة Matlab

و بتطبيق المحاكاة ضمن بيئة الرسم المتحرك باستخدام الأمر drawnow في لغة Matlab يتم رسم منحنى الملاحقة كما في الشكل 3 .



الشكل 3. مسار المفترس و الفريسة وفق مسار التتبع الناتج بالمحاكاة

بتحويلها إلى جملة معادلتين تفاضليتين من الرتبة الأولى كما يلي [4] :

$$\dot{y} = v$$

$$\dot{v} = f(x, y, v)$$

حيث يمكن حلها بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} k_1 &= v_i \\ k_2 &= v_i + 0.5hm_1 \\ k_3 &= v_i + 0.5hm_2 \\ k_4 &= v_i + hm_3 \\ m_1 &= f(x_i, y_i, v_i) \\ m_2 &= f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5hk_1, v_i + 0.5hm_1) \\ m_3 &= f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5hk_2, v_i + 0.5hm_2) \\ m_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3, v_i + hm_3) \end{aligned}$$

و يمكن حساب y و v كما يلي :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)h$$

يمكن برمجة هذه الطريقة بلغة Matlab كما يلي :

```
xf = input('xf=');
X(1) = input('x0=');
Y(1) = input('y0=');
V(1) = input('v0=');
for i=1:(xf-X(1))/h
    y=Y(i);
    x=X(i);
    v=V(i);
    m1=subs(f);
    x=X(i)+0.5*h;
    y=Y(i)+0.5*h*V(i);
    v=V(i)+0.5*h*m1;
    m2=subs(f);
    x=X(i)+0.5*h;
    y=Y(i)+0.5*h*V(i)+0.25*h^2*m1;
    v=V(i)+0.5*h*m2;
    m3=subs(f);
    x=X(i)+h;
    y=Y(i)+h*V(i)+0.5*h^2*m2;
    v=V(i)+h*m3;
    m4=subs(f);
    Y(i+1)=Y(i)+h*V(i)+(1/6)*(m1+m2+m3)*h^2;
```

- [4]. R. L. HERMAN (2015), "Solving Differential Equations Using Simulink", version date June 2017, this text has been reformatted from the original using a modification of the Tufte-book document class in LATEX. See tufte-latex.googlecode.com. solving differential equations using simulink by Russell Herman is licensed under a Creative Commons Attribution-Noncommercial-Share Alike 3.0 United States License. These notes have resided at <http://people.uncw.edu/hermanr/mat361/simulink> since Summer 2015.

منشورات المؤلف:

- [1]. Mohamad, M. (2012). Developing of a Thermal Model for a Residential Room Using Simulink/ MATLAB. p. 157-160.
- [2]. Mohamad, M. (2012). Design a Simplified Model of HVAC System Within a Residential Building by Using MATLAB/ SIMULINK. *The International Building Performance Simulation Association* -p. 93-98.
- [3]. Mohamad, M. WEISMANOVÁ, J. (2014). Modelovanie vetracích systémov s konštantným prietokom vzduchu a systémov riadených skutočnou potrebou v programe MATLAB/ Simulink. *TZB-Vol. 2014, No. 17.03. 2014, p. 1-7. ISSN: 1801-4399.*
- [4]. Mohamad, M. (2014). Modelling indoor temperature by combining TRNSYS and MATLAB/SIMULINK, Vol. 2014, No. 26.05. 2014, p. 1-11. ISSN: 1801-4399.
- [5]. Mohamad, M. (2018). Modelling and control of Indoor Temperature using State Space and Transfer Function Models with Matlab/Simulink. Vol. 2018, No. 28.08. 2018, p. 1-10. ISSN: 1801-4399.
- [6]. Mohamad, M. Mathematical Modeling Applications in Predicting the Spread of Epidemics (Covid 19). *Syrian Computer Society journal*, Vol. 2020, No. 152.
- [7]. Mohamad, M. Mathematical Modeling of the Spread of Covid 19 Epidemic with the Impact of Quarantine and Social Distancing and Simulation using Computer. *Manara University journal*, Vol. 2021, No.1.
- [8]. Mohamad, M. Numerical Simulation of Prediction Models of Tumors. *Manara University journal*, Vol. 2021, No. 2.
- [9]. Mohamad, M. Simulation and Analysis of the Mathematical Model of Herd Immunity. *Manara University journal*, Vol. 2021, No. 3.
- [10]. Mohamad, M. Simulation and Analysis of the Mathematical Model of the Relationship between Predator and Prey in Biological Systems. *Manara University journal*, Vol. 2021, No. 4.
- [11]. Mohamad, M. Modeling and Simulation of Vehicles Motion with Control using MATLAB/SIMULINK.

توضح المحاكاة المسار الدقيق للوصول المفترض إلى الفريسة ، و المسافة التي يقطعها كل منهما ، و إحداثيات نقطة الوصول بدقة .

كما توضح المحاكاة بأن الشرط الوحيد لتحقيق الوصول وفق منحنى الملاحقة الناتج هو أن تكون سرعة المفترس أكبر من سرعة الفريسة ، أي أن سلوك المسار الناتج بأي سرعة أكبر من سرعة الفريسة يضمن بلوغ المفترس لها في لحظة ما ، و هي نتيجة مهمة جرى الاستفادة منها في العديد من التطبيقات .

IV. الاستنتاجات:

- 1- النمذجة الرياضية لمنحنى ملاحقة هدف معين توضح آلية بلوغ الهدف بدقة .
- 2- الوصول إلى النموذج الرياضي لمنحنى الملاحقة يتطلب التعامل عددياً معه باعتبار الظاهرة غير خطية ، حيث يكون تطوير الحل التحليلي أمراً صعباً .
- 3- الحل العددي لنموذج منحنى الملاحقة بطريقة برمجية باستخدام لغة Matlab يعطي إمكانية تنفيذ محاكاة متحركة لعملية مطاردة المفترس للفريسة ، و هو ما يعطي فهماً أكثر تفصيلاً .
- 4- توضح المحاكاة العددية لمنحنى الملاحقة المسافة التي يقطعها المفترس و الفريسة ، و إحداثيات نقطة الوصول بدقة .
- 5- يمكن الاستفادة من النمذجة الرياضية لمنحنى الملاحقة في العديد من التطبيقات المدنية مثل مهام الرصد في مجال الروبوتات ، و العسكرية مثل الطائرات المسييرة الحربية .

المراجع:

- [1]. Malacká, Zuzana. (2012). Pursuit Curves and Ordinary Differential Equations. *Communications - Scientific letters of the University of Zilina*. 14. 66-68. 10.26552/com.C.2012.1.66-68.
- [2]. Boole, G. (2014). A Treatise on Differential Equations (Cambridge Library Collection - Mathematics). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781107049550
- [3]. Atkinson, K., Han, W., Stewart, D. E. (2011). Numerical Solution of Ordinary Differential Equations. Germany: Wiley.

MANARA