ورقة بحثية مجلة مفتوحة الوصول

محاكاة و تحليل النموذج الرياضي للعلاقة بين المفترس و الفريسة Predator-Prey في الأنظمة الحيوية

د. محمد خير عبدالله محمد

(قسم الميكاترونيكس ، جامعة المنارة

البريد الإلكتروني: mohamad.kheir@manara.edu.sy)

الملخص

يمثل نموذج المفترس و الفريسة Predator-Prey Model أهمية كبيرة في الأنظمة الحيوية ، باعتباره يصف علاقة تفاعلية تحدد السلوك الديناميكي للمجتمع الحيوي ، و عدد أفراده سواء المفترس أو الفريسة ، و الفترات الزمنية للتزايد و التناقص لكل منهما ، و ذلك تبعاً لشكل التفاعل في كل فترة .

هذه العلاقة التفاعلية قد تمثل بعد تعديلها رياضياً العلاقة بين الجهاز المناعي و الأجسام المعادية في النظم المناعية ، و العلاقة بين الحشرات الضارة و مكافحاتها الحيوية في تطبيقات وقاية النبات ، و العلاقة بين المفترس و الفريسة في النظم البيئية .

يعبر عن العلاقة بين المفترس و الفريسة بجملة معادلات تفاضلية لا خطية تسمى نموذج لوتكا فولتيرا Lotka-Volterra model ، حيث يستخدم هذا النموذج معدلات التزايد و التناقص لكل نوع ، و أثر تواجد كل منهما على سلوك الآخر .

هذه العلاقة ذات طبيعة خاصة ، إذ تعطي المحاكاة الحاسوبية باستخدام الطرق العددية دلالات مهمة يمكن الاعتماد عليها في تطوير أي عملية تدخل خارجي في سلوك أي منهما ، سواء تدخل طبي ، أو مكافحة حيوية زراعية ، أو تدخل حيوي بقصد الحفاظ على نظام بيئي معين .

في هذا البحث تم تطوير طريقة عددية بلغة Matlab لمحاكاة نموذج لوتكا فولتيرا للعلاقة بين المفترس و الفريسة ، و تحليل نتائج المحاكاة في محاولة لفهم الطبيعة الديناميكية للمجتمع الحيوي الذي تحكمه هذه العلاقة ، و الاستفادة من ذلك في تطوير طرق تدخل مناسبة تبعاً لطبيعة المجتمع الحيوي قيد الدراسة .

كلمات مفتاحية : Predator-Prey Model , Lotka-Volterra model ، المحاكاة الحاسوبية ، المعادلات التفاضلية ، طريقة عددية

I. مقدمة

تلجأ الحيوانات المفترسة إلى الافتراس من أجل البقاء على قيد الحياة ، حيث يسعى كل من الفريسة و المفترس إلى زيادة فرصه في الاستمرار .

تؤدي التفاعلات الديناميكية بين النوعين إلى تكيفات متبادلة ، تعمل على رفع قدرة الافتراس لدى المفترس ، مثل المخالب و الأسنان ، بالإضافة إلى رفع قدرة الفريسة على النجاة ، مثل السرعة ، و التمويه ، و بالتالي فإن العلاقة بين المفترس و الفريسة تشبه السباق التطوري .

على الرغم من أن الافتراس يرتبط عموماً بالحيوانات اللاحمة ، لكن ، و بعد إدخال تعديلات مختلفة على التفاعل بين النوعين يمكن تعميمه على العلاقة بين الجهاز المناعي و الأجسام المعادية في النظم المناعية ، و كذلك العلاقة بين الحشرات الضارة و مكافحاتها الحيوية في وقاية النبات .

تم اقتراح نموذج Lotka – Volterra predator – prey في أبسط صيغه بواسطة Lotka عام 1910 [1] ، ثم وسع النموذج

إلى النظم العضوية مستخدما الأنواع النباتية و الحيوانات العاشبة .

تم قام عالم الرياضيات و الفيزيائي Volterra عام 1926 بنشر مجموعة المعادلات الواصفة للنموذج [2] .

تم الاعتماد بشكل كبير على نموذج Lotka–Volterra لشرح ديناميكيات المجتمعات الحيوية المشتملة على الحيوانات المفترسة و الفريسة [3] .

يمكن تبسيط العلاقة بين المفترس و الفريسة في أي مجتمع حيوي من خلال افتراض وجود مجموعتين حيويتين تعيشان في وسط يوفر للفريسة كمية غير محدودة من إمدادات البقاء على قيد الحياة ، أما المفترس الذي يعيش في نفس الوسط ضمن نفس الظروف فإنه يتغذى فقط على الفريسة [4].

في هذه العلاقة التفاعلية يكون معدل التغير في عدد كل نوع متناسباً مع العدد اللحظي لكل منهما ، و لكن بمعاملات تعتمد على عدد الأفراد من النوع الآخر ، و بالتالي فإن نموذج Lotka–Volterra يقدم عددًا من الافتراضات المهمة [5] ، قد لا تكون محققة تماماً في الطبيعة ، يمكن إيجازها كما يلي :

- a– تجد الفرائس طعاماً كافياً بشكل دائم .
- b– يعتمد النوع المفترس في غذائه بشكل تام على الفرائس المتاحة في الوسط .
- c– إن معدل تغير الأفراد في كل نوع يتناسب مع حجم النوع.
- d– يفترض بأن البيئة لا تتغير لصالح نوع واحد خلال التفاعل بين النوعين .
- e– يملك النوع المفترس شهية غير محدودة .

تساعد هذه الافتراضات على صياغة نموذج رياضي للعلاقة التفاعلية بين المفترس و الفريسة بحيث تعطي المعادلات الناتجة حلولاً حتمية .

II. نموذج لوتكا فولتيرا الرياضي للعلاقة بين المفترس و الفريسة

بفرض هناك عدد معين من النوع المفترس ، يرمز له بالرمز **D** ، و عدد معين من الفرائس ، يرمز له بالرمز **E** ، حيث يعيش النوعان في حيز واحد .

لتطوير نموذج رياضي يعبر عن تغير عدد كل منهما سيتم الافتراض أولاً غياب تام للنوع المفترس ، في هذا الحالة سينتج نموذج رياضي يصف النمو الأسي للفرائس كما يلي [6]:

$$\frac{dE}{dt} = b.E$$

حيث b : معدل تزايد الفرائس

بتنفيذ الحل التحليلي لهذا النموذج ينتج :

$$E = E_0 . e^{b.t}$$

حيث E_0 : العدد الأولي للفرائس

يتضح من النموذج ما يلي :

$$t \to \infty \Rightarrow E \to \infty$$

أي أنه بغياب تام للنوع المفترس سيزداد عدد الفرائس بشكل غير محدود .

بنفس الطريقة ، بفرض غياب تام للفرائس ، في هذا الحالة سينتج نموذج رياضي يصف التناقص الأسي للمفترس كما يلي :

$$\frac{dD}{dt} = -m.D$$

حيث m : معدل تناقص النوع المفترس

بتنفيذ الحل التحليلي لهذا النموذج ينتج :

$$D = D_0 . e^{-m.t}$$

حيث D_0 : العدد الأولي للفرائس

كذلك يتضح من النموذج ما يلي :

$$t \to \infty \Rightarrow D \to 0$$

أي أنه بغياب تام للفرائس سينقرض النوع المفترس .

لذلك ، و لأن الحالتين غير واقعيتين تماماً ، سيتم إدخال تعديلات أساسية على معادلة الفريسة و المفترس ، تأخذ بعين الاعتبار حالة التفاعل بينهما ، حيث تنتج جملة المعادلتين التفاضليتين التاليتين [7] :

$$\frac{dE}{dt} = b.E - a_1.E.D$$

$$\frac{dD}{dt} = -m.D + a_2.E.D$$

حيث :

- a_1 : معدل تناقص الفرائس نتيجة الافتراس من فرد واحد من النوع المفترس .

من المهم الإشارة هنا إلى أنه تم الافتراض بأن الفرائس تملك موارد غذائية غير محدودة ، وبأنها قادرة على التزايد بشكل غير محدود بغياب النوع المفترس ، و لكن مع وجود المفترس يصبح معدل تناقص الفرائس متناسباً مع معدل التقائها بالنوع المفترس ، و هو ما يعبر عنه بالمعدل a_1 .

و بالتالي يمكن تفسير معادلة الفريسة كما يلي :

يتغير عدد أفراد الفريسة بحساب الفرق بين كل من عددها المتزايد بالتكاثر (و المتناسب مع عددها اللحظي) و عددها المتناقص نتيجة الافتراس من النوع المفترس (و المتناسب مع عدد أفراد النوع المفترس) .

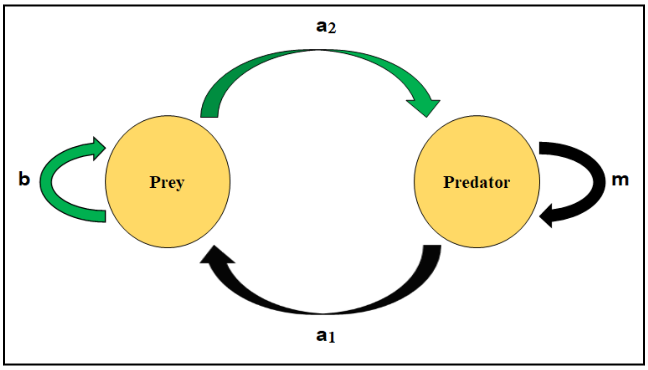
- a_2 : معدل تزايد النوع المفترس نتيجة افتراس فرد واحد من الفرائس .

حيث تم الافتراض بأن النوع المفترس ينمو بالاعتماد أساساً على الفرائس ، و بالتالي فهي ستنقرض في حال غياب تام للفرائس ، لكن مع وجود الفرائس يزداد عدد النوع المفترس بمعدل لا يساوي بالضرورة معدل افتراسه للفرائس ، و هو ما يعبر عنه بالمعدل a_2 .

و بالتالي يمكن تفسير معادلة المفترس كما يلي :

يتغير عدد أفراد النوع المفترس بحساب الفرق بين كل من عددها المتناقص نتيجة الموت أو الهجرة (و المتناسب مع عددها اللحظي) و عددها المتزايد نتيجة افتراس الفرائس (و المتناسب مع عدد الفرائس) .

حالة التفاعل بين النوعين موضحة في الشكل 1 .



الشكل 1. مخطط توضيحي لحالة التفاعل بين المفترس و الفريسة

III. المحاكاة الحاسوبية العددية لنموذج لوتكا فولتيرا

تم تصميم نموذج برمجي لحل معادلات لوتكا فولتيرا بلغة Matlab ، و ذلك بالاعتماد على طريقة عددية مبسطة من خلال تصميم مصفوفة لكل معادلة من معادلتي المفترس و الفريسة ، تحوي كل مصفوفة عمودين ، العمود الأول يمثل الحلول اللحظية للمعادلة ، أي عدد الأفراد ، سواء المفترس أو الفريسة ، أما العمود الثاني يمثل اللحظات الزمنية المقابلة لكل حل ، حيث تم تطبيق متتابعة لتوليد الحلول اللحظية باستخدام حلقة for البرمجية و ذلك لمدة زمنية معينة ، و بخطوة زمنية محددة ، و مع كل عملية تنفيذ للحلقة وفق هذه الطريقة يتم إضافة حل المعادلة اللحظي إلى مجموع الحلول اللحظية السابقة انطلاقاً من القيم الابتدائية لعدد أفراد كلا النوعين ، لينتج عدد سطور لكل مصفوفة يساوي عدد مرات المحاكاة (عدد مرات تنفيذ حلقة for ، و الذي يعتمد على زمن المحاكاة و خطوة المحاكاة) .

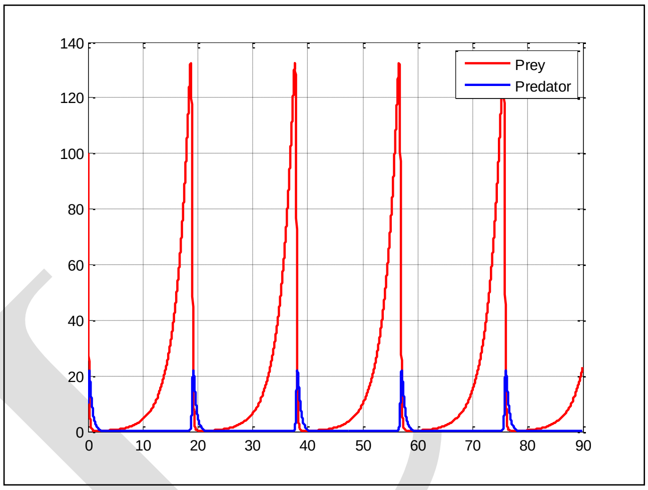
برسم العلاقة بين عمودي المصفوفتين الناتجتين بعد الانتهاء من تنفيذ مرات الحل اللحظي بحلقة for ، يمكن إخراج منحنيات بيانية تمثل عدد الفريسة و المفترس خلال كامل مدة المحاكاة ، حيث يمثل المحور الأفقي الزمن بالأيام ، و يمثل المحور العمودي عدد الأفراد لكل نوع .

تم تنفيذ المحاكاة من أجل البارامترات التالية :

```
E0=100;
D0=10;
```

```
b=0.4;
a1=0.4;
m=2;
a2=0.1;
```

فكانت النتائج كما هو مبين في الشكل 2



الشكل 2. المحاكاة العددية لنموذج المفترس و الفريسة

من المحاكاة يتضح بأن عدد النوع المفترس يزداد بشكل واضح عندما تكون هناك أعداد وافرة من الفرائس ، ولكن زيادة عدد النوع المفترس في النهاية يفوق قدرة إمدادها بالفرائس ، فيتناقص النوعان ، مما يؤدي إلى ازدياد عدد الفرائس مرة أخرى .

أي أنه في كل مرحلة تفاعل يتناقص عدد الفرائس مترافقاً مع انخفاض عدد النوع المفترس ، ثم يتعافى النوعان مجدداً ، حيث إنه بانخفاض عملية الافتراس نتيجة هذا التناقص يبدأ عدد الفرائس بالازدياد تدريجياً ، فيزداد بالتالي عدد النوع المفترس .

إن المحاكاة العددية تساعد على إعداد خطط تدخل معينة بهدف ضبط عدد أفراد النوعين ، المفترس أو الفريسة ، أو كلاهما .

فلو كان المطلوب منع زيادة عدد الفرائس عن حد معين في نظام حيوي ما ، مثل المكافحة الحيوية في مجالات وقاية النباتات ، لا بد في هذه الحالة من تحديد العدد الأولي من النوع المفترس الضروري لتحقيق ذلك .

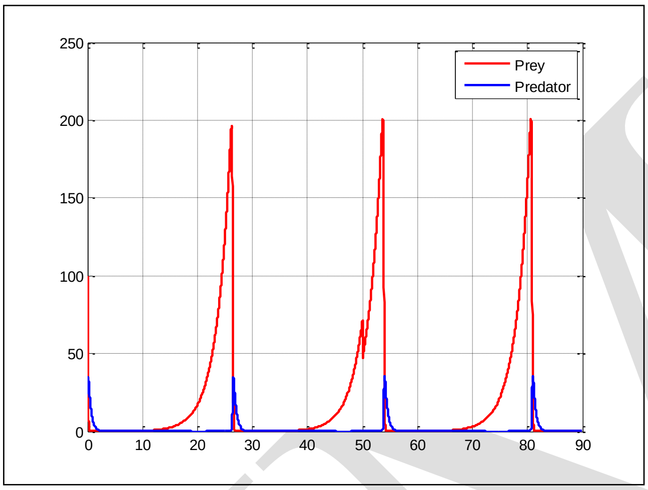
يمكن إدخال تعديلات برمجية على النموذج العددي بحيث تتم المحاكاة كل مرة بدءاً من مفترس واحد وصولاً إلى حد أعظمي (و ليكن عدد الفرائس ، حيث من المفترض ألا يتجاوز هذا العدد) ، ثم حساب العدد الأعظمي للفرائس في كل مرة يتم فيها تنفيذ المحاكاة ، و التي تتوقف عن الاستمرار في التنفيذ عند تجاوز هذه القيمة للعدد الأعظمي المسموح .

هذه العملية تتم باستخدام تقنيات البرمجة ، و تحديداً عبارة الإيقاف *break* في لغة Matlab .

فمثلاً لو كان المطلوب منع زيادة عدد الفرائس عن 200 فرد عند المعطيات السابقة ذاتها ، فإنه بتنفيذ المحاكاة سيعطي النموذج النتيجة التالية :

Predators=24

إضافة إلى رسم منحنيات تغير أعداد كل من النوعين مع الزمن ، كما هو مبين في الشكل 3



الشكل 3. المحاكاة العددية لعملية ضبط عدد الفريسة

حيث تظهر المحاكاة أنه عند عندما يكون العدد الأولي من النوع المفترس 24 فرداً فإن عدد الفريسة الأعظمي لن يتجاوز الحد الأعظمي المطلوب ، و البالغ 200 في هذه الحالة .

هذه العملية يمكن تنفيذها بذات الطريقة إذا كان المطلوب ضبط عدد النوع المفترس مثلاً ، و هي طريقة يمكن توظيفها في العديد من التطبيقات المشابهة ، مثل التطبيقات الطبية .

IV. الاستنتاجات

1- تستخدم النمذجة الرياضية في تمثيل ديناميكيات النظم البيئية على نحو فعال ، فهي تساعد على التنبؤ بتأثير العوامل المختلفة على الكائن قيد الدراسة .

2- في النظام القائم على المفترس و الفريسة ، تستمر حالات التزايد و التناقص بشكل دوري بين النوعين . هذه العلاقة التفاعلية مهمة في تحليل التوازن في النظام .

3- يحدث التوازن في النظام عندما لا يتغير أي من عدد المفترس أو الفريسة . فإن كان بديهياً اعتبار انقراض النوعين حالة من حالات التوازن من وجهة نظر رياضية بحتة ، لكن واقعيا هذا لا يمكن أن يحدث إلا إذا تم القضاء على الفريسة بالكامل بشكل ما ، و هو ما قد يسبب في انقراض المفترس نتيجة الجوع .

و من ناحية أخرى فإنه إذا تم القضاء على المفترس ، فإن أعداد الفريسة ستنمو من دون قيود .

هذه الدلالات من الضروري أخذها بعين الاعتبار عند تحليل علاقة التفاعل بين النوعين في النموذج .

4- يمكن استخدام النمذجة الرياضية في تحديد عملية الضبط المصطنع لأعداد المفترس و الفريسة باستخدام المحاكاة الحاسوبية ، و هو ما يوفر الوقت و الجهد و الكلفة .

عملية الضبط هذه تصبح شديدة الأهمية لدى تطبيقها في المجالات الطبية و الزراعية .

المراجع:

[1]. A.J. Lotka, Contribution to the Theory of Periodic Reaction, *J. Phys. Chem.*, 14 (3), pp 271-274, (1910)

[2]. V. Volterra, Variazioni e fluttuazioni del numero dindividui in specie animali conviventi, *Mem. Acad. Lincei Roma*, 2, 31-113, (1926)

[3]. A.A. Berryman, The Origins and Evolution of Predator-Prey Theory, *Ecology*, 73(5), 1530-1535, (1992)

[4]. Kingsland, S. (1995). *Modeling Nature: Episodes in the History of Population Ecology*. University of Chicago Press. ISBN 978-0-226-43728-6.

[5]. H.I. Freedman, Deterministic Mathematical Models in Population Ecology, Marcel Dekker, (1980)

[6]. Cooke, D.; Hiorns, R. W.; et al. (1981). *The Mathematical Theory of the Dynamics of Biological Populations*. II. Academic Press.

[7]. F. Brauer and C. Castillo-Chavez, Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology, Springer-Verlag, (2000).

منشورات المؤلف :

[1]. Mohamad, M. (2012). Developing of a Thermal Model for a Residential Room Using Simulink/ MATLAB. p. 157-160.

[2]. Mohamad, M. (2012). Design a Simplified Model of HVAC System Within a Residential Building by Using MATLAB/ SIMULINK. The International Building Performance Simulation Association –p. 93-98.

[3]. Mohamad, M. WEISMANOVÁ, J. (2014). Modelovanie vetracích systémov s konštantným prietokom vzduchu a systémov riadených skutočnou potrebou v programe MATLAB/ Simulink. TZB- Vol. 2014, No. 17.03. 2014, p. 1-7. ISSN: 1801-4399.

[4]. Mohamad, M. (2014). Modelling indoor temperature by combining TRNSYS and MATLAB/SIMULINK, Vol. 2014, No. 26.05. 2014, p. 1-11. ISSN: 1801-4399.

[5]. Mohamad, M. (2018). Modelling and control of Indoor Temperature using State Space and Transfer Function Models with Matlab/Simulink. Vol. 2018, No. 28.08. 2018, p. 1-10. ISSN: 1801- 4399.

[6]. Mohamad, M. Mathematical Modeling Applications in Predicting the Spread of Epidemics (Covid 19). *Syrian Computer Society journal*, Vol. 2020, No. 152.

[7]. Mohamad, M. Mathematical Modeling of the Spread of Covid 19 Epidemic with the Impact of Quarantine and Social Distancing and Simulation using Computer. *Manara University journal*, Vol. 2021, No.1.

[8]. Mohamad, M. Numerical Simulation of Prediction Models of Tumors. *Manara University journal*, Vol. 2021, No. 2.

[9]. Mohamad, M. Simulation and Analysis of the Mathematical Model of Herd Immunity. *Manara University journal*, Vol. 2021, No. 3.

[10]. Mohamad, M. Simulation and Analysis of the Mathematical Model of the Relationship between Predator and Prey in Biological Systems. *Manara University journal*, Vol. 2021, No. 4.

[11]. Mohamad, M. Modeling and Simulation of Vehicles Motion with Control using MATLAB/SIMULINK. *Syrian Computer Society journal*, Vol. 2022, No. 161.