ورقة بحثية مجلة مفتوحة الوصول

محاكاة و تحليل النموذج الرياضي للمناعة الجماعية ضد انتشار الوباء

د. محمد خير عبدالله محمد
(قسم الميكاترونيكس ، جامعة المنارة
البريد الإلكتروني: mohamad.kheir@manara.edu.sy)

الملخص

خلال أزمة وباء كوفيد 19 استخدم مصطلح المناعة الجماعية على نحو واسع , باعتباره الحل النهائي الفعال ضد انتشار الوباء , حيث يتم في هذا السياق الإشارة إلى نسب مئوية معينة من مجمل المجتمع السكاني التي يتوجب عليها أن تكون محصنة ضد الإصابة لتحقيق المناعة الجماعية . في هذا المقال تم الاعتماد على معادلة الإصابة بالوباء في نموذج S I R لتطوير نموذج رياضي لرقم التكاثر الأسي , و هو بارامتر هام في تحديد طبيعة انتشار الوباء , يشير إلى عدد الأفراد التي يمكن لشخص واحد مصاب نقل المرض إليهم .

ثم بالاعتماد على رقم التكاثر الأسي و سلوك منحني الإصابة تم تطوير نموذج رياضي لعتبة المناعة الجماعية , و هي النسبة المئوية من المجتمع السكاني التي يتوجب أن تكون محصنة ضد الإصابة لوقف انتشار الوباء , حيث يتضح من النموذج الرياضي اعتماد قيمة المناعة الجماعية على بارامترات أساسية لها صلة مباشرة بالسلوك الوقائي للأفراد في بؤرة المرض .

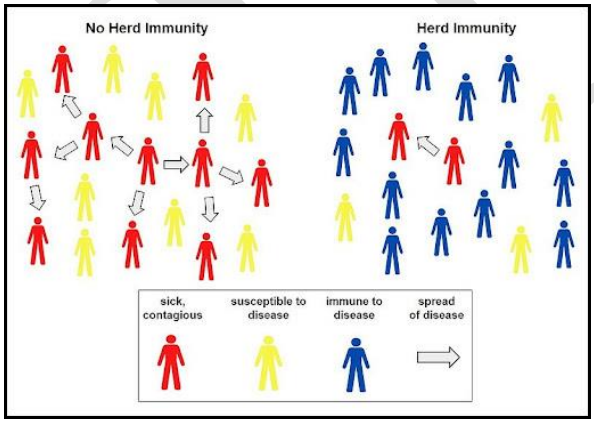
تم تنفيذ محاكاة عددية باستخدام Matlab لانتشار الوباء في عينة سكانية , و رسم منحني الإصابة مع و بدون تحقيق المناعة الجماعية , و المقارنة بين معطيات الحالتين .

كلمات مفتاحية : كوفيد 19 ، المناعة الجماعية , نموذج S I R , رقم التكاثر الأسي ، عتبة المناعة الجماعية , محاكاة عددية , Matlab .

I. مقدمة

في علم الأوبئة يفقد الفيروس قدرته على العدوى مع الوقت إما بمنعه من إيجاد أجسام مضيفة ينقل إليها المرض , و ذلك من خلال إجراءات الوقاية و التباعد الاجتماعي , أو من خلال تحصين الأفراد في بؤرة التفشي ضد الإصابة إلى الحد الذي يمنعه من الاستمرار في الانتشار, و هو ما يعرف بالمناعة الجماعية Herd Immunity . [1]

تحصل المناعة الجماعية من خلال اللقاحات المضادة , أو من خلال المناعة الطبيعية عبر تكون الأجسام المضادة في الأشخاص الذين يتعافون من الإصابة . الشكل 1 يظهر مبدأ التحصين ضد الوباء في وقف انتشاره , و ذلك من خلال تواجد أشخاص محصنين ضد الإصابة في بؤرة المرض , و هو ما سيجعل الوباء يفقد القدرة على الانتشار مع الوقت .



الشكل 1. مبدأ التحصين ضد الوباء لمنع انتشاره

II. النموذج الرياضي لرقم التكاثر الأسي للوباء

في النمذجة الرياضية للأوبئة يتم تصنيف الأفراد في العينة السكانية ضمن ثلاث مكونات أساسية : معرضون للإصابة , مصابون , و متعافون (أي كانوا مرضى و تعافوا)

يعطى نموذج S I R (**Susceptible** –**Infectious** – **Recovered**) بجملة المعادلات التفاضلية التالية : [2]

$$\frac{dS}{dt} = -a.n.b.\frac{I}{N}.S$$
$$\frac{dI}{dt} = a.n.b.\frac{I}{N}.S - \frac{I}{D}$$
$$\frac{dR}{dt} = \frac{I}{D}$$

حيث:

$\frac{dS}{dt}$ [individual/time]: التغير في عدد المعرضين للإصابة خلال فترة زمنية معينة.

$\frac{dI}{dt}$ [individual/time]: التغير في عدد المصابين خلال نفس الفترة الزمنية.

$\frac{dR}{dt}$ [individual/time]: التغير في عدد المتعافين خلال نفس الفترة الزمنية

a : النسبة المئوية لمتوسط الوقت الذي يقضيه الشخص و هو في حالة اتصال مع آخرين خلال فترة زمنية معينة. هذا الرقم يمثل فعلياً بارامتر مهم من بارامترات التباعد الاجتماعي , كمقدار حظر الحركة المطبق في بؤرة المرض .

n : العدد الوسطي للأشخاص الذي يمكن أن يحتك بهم الشخص خلال نفس الفترة الزمنية . هذا الرقم يمثل بارامتر آخر مهم من بارامترات التباعد الاجتماعي , كمقدار التباعد المكاني بين الأفراد في بؤرة المرض .

$\frac{I}{N}$: احتمال أن يكون الاتصال مع أشخاص مصابين , أي نسبة عدد المصابين إلى العدد الإجمالي للعينة السكانية في بؤرة المرض N .

حيث: $N = S + I + R$.

b : احتمال انتقال المرض عند اتصال مريض مع شخص آخر غير مريض, أي نسبة حالات الإصابة من كل مئة حالة اتصال بين مريض و غير مريض . هذا الرقم يمثل مقدار الالتزام بالإجراءات الوقائية مثل ارتداء الكمامات و إجراءات التعقيم و النظافة الشخصية .

D : الفترة الزمنية للمرض. و هذا الرقم يمثل مقدار جاهزية البنية التحتية الطبية و فعالية العلاجات المقدمة للمصابين .

بالعودة إلى معادلة الإصابة في نموذج S I R :

$$\frac{dI}{dt} = a.n.b.\frac{I}{N}.S - \frac{1}{D}I$$

يمكن إعادة صياغة المعادلة بالشكل التالي :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{D}(a.n.b.D.\frac{S}{N} - 1).I$$

هذه المعادلة التفاضلية لتغير عدد الإصابات تشير إلى أن منحني الإصابات سيكون متزايداً إذا كانت أمثال I في الطرف الأيمن ذات قيمة موجبة , أي :

$$a.n.b.D.\frac{S}{N} - 1 > 0 \Leftrightarrow a.n.b.D.\frac{S}{N} > 1$$

و سيكون منحني الإصابات متناقصاً إذا كانت أمثال I ذات قيمة سالبة , أي :

$$a.n.b.D.\frac{S}{N} - 1 < 0 \Leftrightarrow a.n.b.D.\frac{S}{N} < 1$$

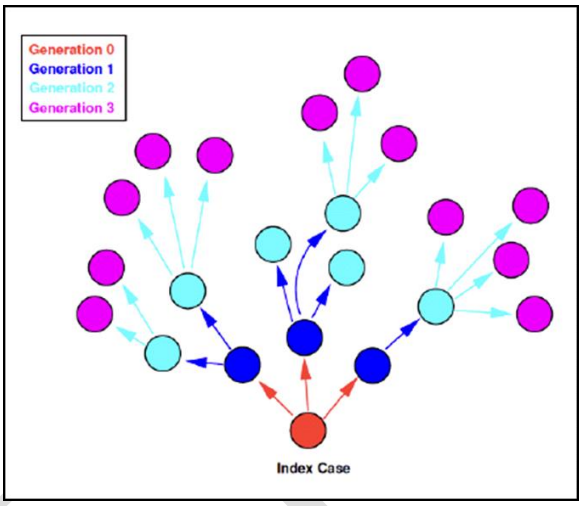
يسمى المقدار $(a.n.b.D.\frac{S(0)}{N})$ reproduction number

أي رقم التكاثر الأسي , و يرمز له Re , و يمثل عدد الأشخاص الذي يمكن أن ينقل إليهم العدوى شخص مصاب واحد . [3]

حيث $S(0)$: العدد الأولي للأشخاص المعرضين للإصابة .

و بالتالي فإن شرط حصول انتشار للوباء أي تزايد في منحني الإصابات هو : $\mathrm{Re} > 1$

في الشكل 2 رسم توضيحي مبسط لانتشار الوباء انطلاقاً من إصابة واحدة , حيث يظهر كيف أن العدوى تنتقل من جيل إلى جيل (من مستوى إلى مستوى) باعتبار أن رقم التكاثر الأسي للوباء في هذه الحالة أكبر من 1 .



الشكل 2. انتقال الوباء من مستوى إلى مستوى حيث $Re > 1$

من علاقة رقم التكاثر الأسي يتضح بأنه لجعل هذا الرقم أصغر من 1 لا بد من جعل المقادير التالية : a,n,b,D أصغر ما يمكن , و هذا يوضح أهمية السلوك الوقائي للأفراد في العينة السكانية على اعتبار أن هذه المقادير تحدد هذا السلوك بشكل أساسي .

III. عتبة المناعة الجماعية

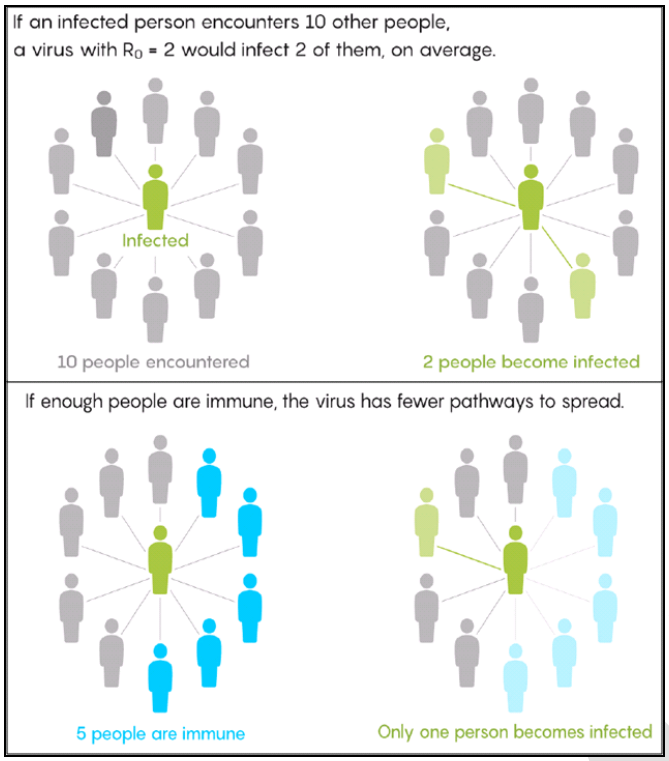
بالعودة مرة أخرى إلى معادلة الإصابة في نموذج S I R

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{D}(a.n.b.D.\frac{S}{N} - 1).I$$

يمكن ملاحظة أنه لمنع انتشار الوباء أي جعل Re أصغر من 1 يجب أن يفقد الوباء القدرة على إصابة عدد معين من المعرضين للإصابة , أي لا بد من تحييد نسبة من المعرضين للإصابة كما في الشكل 3 و إخراجها من قابلية الإصابة بطريقة ما, نرمز لهذه النسبة بالرمز ρ .

أي :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{D}(a.n.b.D.\frac{(S-\rho S)}{N} - 1).I$$



الشكل 3. وقف انتشار الوباء من خلال المناعة الجماعية

بإعادة صياغة العلاقة بدلالة رقم التكاثر الأسي Re :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{D}((1-\rho).R_e - 1).I$$

توضح العلاقة السابقة أن هناك عتبة حدية للنسبة ρ يتوقف فيها الوباء عن التزايد تعطى بالعلاقة : [4]

$$\rho_c = 1 - \frac{1}{R_e}$$

و بالتالي لمنع انتشار الوباء يجب أن يتحقق الشرط التالي :

$$\rho \geq \rho_c$$

أي يجب تحصين نسبة معينة من العينة السكانية ضد الوباء لجعل منحني الإصابات يتناقص , و بالتالي يتم كبح انتشار الوباء , و هو ما يعني تحقق حالة المناعة الجماعية .

في الجدول 1 تعطى قيم رقم التكاثر الأسي و عتبة المناعة الجماعية لمجموعة من الأمراض .

الجدول 1 . بيانات العدوى لمجموعة من الأمراض

Disease	R0	Threshold (%)
Mumps	4-7	75–86
Polio	5-7	80–86
Smallpox	5-7	80–85
Diphtheria	6-7	85
Rubella	6-7	83–85
Pertussis	12-17	92–94
Measles	12-18	83–94

Tangled Bank Studios; data from Epidemiologic Reviews 1993

IV. نتائج المحاكاة

تم تنفيذ المحاكاة عددياً بطريقة مبرمجة بلغة Matlab و ذلك لانتشار الوباء في مجتمع سكاني يحوي 50 شخص مصاب و 1000 شخص معرض للإصابة , مع البارامترات التالية :

a=0.15 b=0.2 n=10 D=14

المحاكاة جرت على مرحلتين حيث قسمت كل مرحلة إلى حالتين كما يلي :

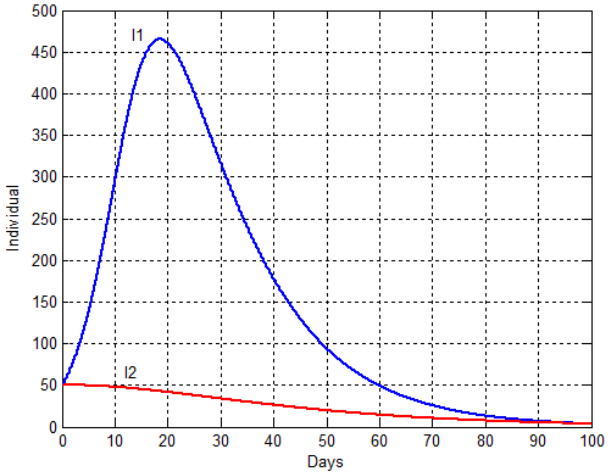
المرحلة الأولى :

الحالة الأولى Re=4

حيث يظهر تزايد في المنحني الأول انطلاقاً من الإصابات الأولية في العينة السكانية , أي بمعنى آخر لقد حصل انتشار للوباء , و نتج عن ذلك حدوث ذروة إصابات كما هو موضح في الشكل 4 .

الحالة الثانية Re=1

تم فيها حساب عتبة المناعة الجماعية و التي بلغت 75% و التي تضمن جعل رقم التكاثر الأسي يساوي 1 , و هذا يعني أن هذه النسبة هي أقل نسبة يجب تحصينها ضد الإصابة لمنع انتشار الوباء , حيث يتبين من المنحني الثاني تناقص في عدد الإصابات مع الوقت .



الشكل 4. منحنيات الإصابة قبل و بعد تحقيق عتبة المناعة الجماعية b=0.2

المرحلة الثانية :

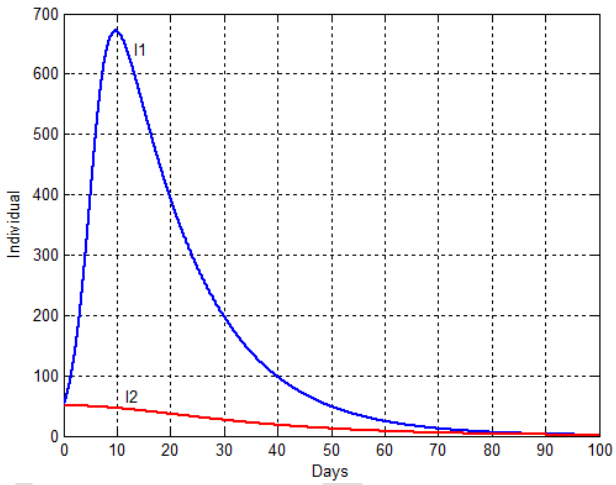
تم استخدام البيانات السابقة ذاتها مع تغيير فقط في قيمة b حيث أصبحت تساوي 0.1 , و جرى تنفيذ المحاكاة بذات الطريقة السابقة , فكانت النتائج كما هو مبين في الشكل 5 .

الحالة الأولى Re=8

حيث يظهر تزايد أكبر في ذروة المنحني الأول , و ذلك نتيجة زيادة قيمة b و الذي يمثل كما تمت الإشارة سابقاً إلى درجة الالتزام بالإجراءات الوقائية مثل ارتداء الكمامات و عمليات التعقيم و النظافة الشخصية .

الحالة الثانية Re=1

تم فيها حساب عتبة المناعة الجماعية و التي بلغت 88% و التي تضمن جعل رقم التكاثر الأسي يساوي 1 , و هذا يعني أن هذه النسبة قد زادت عن الحالة الأولى و هو أمر متوقع بالعودة إلى العلاقة الرياضية لعتبة المناعة الجماعية , و هذا بالمجمل يوضح تأثير السلوك الوقائي للأفراد في بيئة المرض على قيمة عتبة المناعة الجماعية , و بالتالي تأثير ذلك السلوك على إمكانية و سرعة حصول هذه المناعة .



الشكل 5. منحنيات الإصابة قبل و بعد تحقيق عتبة المناعة الجماعية b=0.4

V. الاستنتاجات

1- التحليل الرياضي لنموذج انتشار الوباء يعطي فهماً أعمق حول الوباء , و آلية انتشاره , و إمكانية مواجهته .

2- إن تحليل معادلة الإصابة في نموذج S I R ينتج عنه بارامتر مهم هو رقم التكاثر الأسي Re , و الذي يشير إلى العدد المتوقع نقل المرض إليهم من شخص مصاب واحد , و قيمته حسابياً تساوي جداء متوسط نسبة الوقت اليومي لاحتكاك الأشخاص في بؤرة المرض a بمتوسط عدد الأشخاص الذي يحتك بهم الشخص يومياً في بؤرة المرض n بنسبة حالات الإصابة من كل مئة حالة اتصال بين مريض و غير مريض b بمتوسط الوقت اللازم للشفاء من المرض D بعدد الأشخاص الأولي المعرضين للإصابة S(0) مقسوماً على إجمالي حجم العينة السكانية N .

هذا المقدار إن كان أكبر من 1 فهناك انتشار للوباء , و إن كان أقل من 1 فهناك انحسار للوباء.

3- لكي تحصل مناعة جماعية ينحسر عندها الوباء يجب أن يتم تحصين نسبة معينة من S(0) (العدد الأولي للمعرضين للإصابة) ، أي تحييدها عن وضعية معرض للإصابة ، و هذه النسبة المحصنة تحدد رياضياً بحيث يتم جعل رقم الانتشار الأسي Re أصغر من 1 , و تسمى عتبة المناعة الجماعية , حيث يتم التحصين ضد نقل العدوى إما باللقاح أو بالشفاء بعد الإصابة .

4- تبين محاكاة معادلة الإصابة بطريقة رياضية عددية مبرمجة أن قيم رقم التكاثر الأسي و عتبة المناعة الجماعية مرتبطة مباشرة ببارامترات تتعلق بالسلوك الوقائي للأفراد في بؤرة الوباء , فلتقليل عتبة المناعة الجماعية يجب تقليل رقم الانتشار الأسي Re و ذلك من خلال :

- التباعد الاجتماعي و الحد من الحركة (تقليل n و a)
- الالتزام بالإجراءات الوقائية مثل الكمامات و التعقيم (تقليل b)
- العناية الصحية العالية للمرضى (تقليل D)

و هذا يعني أن النسبة المئوية التي يجب تحصينها ضد الوباء للوصول إلى المناعة الجماعية تختلف من مجتمع سكاني إلى آخر تبعاً لسلوك الأفراد في كل مجتمع , و هو ما يعني أنه كلما ارتفعت درجة الالتزام بالإجراءات الوقائية في مجتمع ما كلما كانت عتبة المناعة الجماعية أقل .

المراجع:

[1] Khumaeroh, Mia & Firdaus, Ahmad. (2021). Analysis of Herd Immunity on the Mathematical Model of Covid-19 Transmission.10.2991/assehr.k.210508.050.

[2] Rodrigues, Helena Sofia. “Application of SIR epidemiological model: new trends.” *ArXiv* abs/1611.02565 (2016): n. pag.

[3] Dietz K. The estimation of the basic reproduction number for infectious diseases. Stat Methods Med Res. 1993;2(1):23-41. doi: 10.1177/096228029300200103. PMID: 8261248.

[4] Scala, A. The mathematics of multiple lockdowns. *Sci Rep* 11, 8078 (2021). https://doi.org/10.1038/s41598-021-87556-6

منشورات المؤلف:

[1] Mohamad, M. (2012). Developing of a Thermal Model for a Residential Room Using Simulink/ MATLAB. p. 157-160.

[2] Mohamad, M. (2012). Design a Simplified Model of HVAC System Within a Residential Building by Using MATLAB/ SIMULINK. The International Building Performance Simulation Association –p. 93-98.

[3] Mohamad, M. WEISMANOVÁ, J. (2014). Modelovanie vetracích systémov s konštantným prietokom vzduchu a systémov riadených skutočnou

potrebou v programe MATLAB/ Simulink. TZB- Vol. 2014, No. 17.03. 2014, p. 1-7. ISSN: 1801-4399.

[4] Mohamad, M. (2014). Modelling indoor temperature by combining TRNSYS and MATLAB/SIMULINK, Vol. 2014, No. 26.05. 2014, p. 1-11. ISSN: 1801-4399.

[5] Mohamad, M. (2018). Modelling and control of Indoor Temperature using State Space and Transfer Function Models with Matlab/Simulink. Vol. 2018, No. 28.08. 2018, p. 1-10. ISSN: 1801- 4399.

[6] Mohamad, M. Mathematical Modeling Applications in Predicting the Spread of Epidemics (Covid 19). Syrian Computer Society journal, Vol. 2020, No. 152.

[7] Mohamad, M. Mathematical Modeling of the Spread of Covid 19 Epidemic with the Impact of Quarantine and Social Distancing and Simulation using Computer. Manara University journal, Vol. 2021, No. 1.

[8] Mohamad, M. Numerical Simulation of Prediction Models of Tumors. Manara University journal, Vol. 2021, No. 2.

[9] Mohamad, M. Simulation and Analysis of the Mathematical Model of Herd Immunity. Manara University journal, Vol. 2021, No. 3.

[10] Mohamad, M. Simulation and Analysis of the Mathematical Model of the Relationship between Predator and Prey in Biological Systems. Manara University journal, Vol. 2021, No. 4.

[11] Mohamad, M. Modeling and Simulation of Vehicles Motion with Control using MATLAB/SIMULINK. Syrian Computer Society journal, Vol. 2022, No. 161.