

نمذجة و محاكاة العلاقة بين أقطاب نظام ديناميكي من المرتبة الثانية و استجابته الخطوية

د.محمد خير عبدالله محمد

(محاضر في قسم الميكاترونكس/كلية الهندسة، جامعة المنارة ، البريد الإلكتروني: mohamad.kheir@manara.edu.sy)

المخلص

إن تحديد أقطاب أي نظام ديناميكي هي عملية أساسية لدراسة استقراره من جهة، وتحديد شكل استجابته لدخل معين من جهة أخرى. يتم إيجاد الأقطاب من خلال حساب جذور مقام تابع النقل الذي يربط بين خرج النظام و الدخل المطبق. تم في هذا المقال نمذجة ومحاكاة العلاقة بين أقطاب نظام ديناميكي من المرتبة الثانية (يوصف بمعادلة خطية من المرتبة الثانية) واستجابته الخطوية، وذلك من خلال تحديد البارامترات الأساسية لاستجابته الخطوية، وهي زمن التجاوز الأعظمي، والنسبة المئوية للتجاوز الأعظمي، وزمن الاستقرار، ثم استنتاج العلاقات الرياضية لأقطاب النظام بدلالة هذه البارامترات، بحيث يمكن من خلال النماذج الرياضية الناتجة تحليل التأثير المباشر لطبيعة الأقطاب على شكل الاستجابة، وهو ما يوضح كيفية التحكم بالاستجابة بإحدى خوارزميات التحكم. تم تنفيذ المحاكاة على نظام كتلة و نابض و مخمد باستخدام بيئة Matlab للتحقق من النماذج الرياضية المستنتجة، حيث تم إيجاد تابع النقل للنظام، وحساب أقطابه، وتحديد البارامترات الأساسية لاستجابته الخطوية، ثم تطبيق النماذج الرياضية، ومقارنة النتائج، والتي أعطت قيماً متطابقة .

كلمات مفتاحية : أقطاب، استقرار، تابع النقل، نظام مرتبة ثانية، استجابة خطوية، زمن التجاوز الأعظمي، النسبة المئوية للتجاوز الأعظمي، زمن الاستقرار.

ABSTRACT

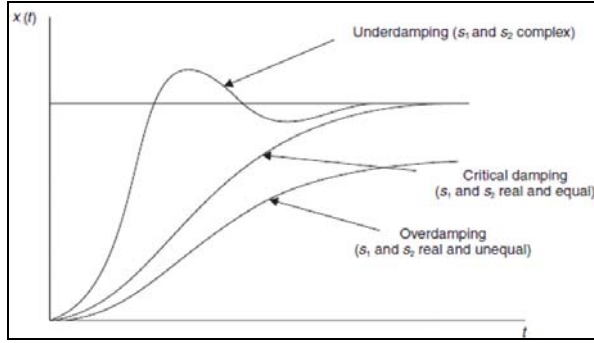
Determining the poles of the dynamic system is a basic process for studying its stability on the one hand, and determining the form of its response to a specific input on the other hand.

The poles are found by calculating the roots of the denominator of the transfer function that links the system output to the applied input.

In this paper, the relationship between the poles of a second-order dynamic system (described by a second-order equation) and its step response was modeled and simulated, by determining the basic parameters of its step response, which are the time of maximum overshoot, the percentage of maximum overshoot, and settling time, then deriving the mathematical relationships for the system's poles in terms of these parameters, so that the direct effect of the poles on the form of the response can be analyzed, through the resulting mathematical models, which explains how to control the response using one of the control algorithms.

The simulation was carried out on a mass, spring, and damper system using Matlab to verify the derived mathematical models. The transfer function of the system was found, its poles were calculated, and the basic parameters of its step response were determined. Then the mathematical models were applied and the results were compared, which gave values Identical.

Keywords — poles, stability, transfer function, second-order system, step response, maximum overshoot time, percentage of maximum overshoot, settling time.



الشكل 2. أنماط الاستجابة الرئيسية تبعاً لطبيعة الأقطاب

- استجابة بتخميد ناقص: وهي تحصل عندما تكون الأقطاب عقدية، حيث تظهر في الاستجابة تأرجح عن القيمة المستقرة .
- استجابة بتخميد فائض: وهي تحصل عندما تكون الأقطاب حقيقية مختلفة و سالبة، حيث لا يكون هناك تأرجح في الاستجابة، ويكون زمن الاستقرار أطول من زمن الاستقرار في حالة التخميد الحرج .
- استجابة بتخميد حرج: وهي تحصل عندما تكون الأقطاب حقيقية سالبة مكررة، حيث تصل الاستجابة إلى القيمة المستقرة بأقل زمن دون حصول تجاوز عن القيمة المستقرة .

و بالتالي إن أقطاب النظام تحدد فعلياً شكل الاستجابة من خلال تأثيرها المباشر على البارامترات المميزة للاستجابة، حيث تم في هذا المقال استنتاج النماذج الرياضية التي تربط الأقطاب مع تلك البارامترات.

II. النموذج الرياضي للعلاقة بين أقطاب النظام و استجابته الخطوية

يعبر عن تابع النقل لأي نظام ديناميكي من المرتبة الثانية بالصيغة القياسية التالية : [3]

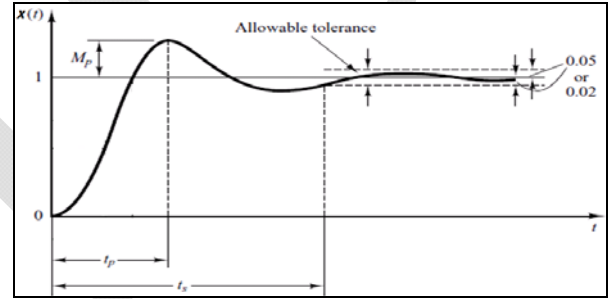
$$G(s) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

حيث :

K : ثابت كسب الحالة المستقرة ، و هو يمثل فرق خرجين مستقرين على فرق الدخلين المقابلين لهما ، حيث يمكن الحصول

I. مقدمة

من وجهة نظر الرياضيات ، تمثل القيم الذاتية للنظام الديناميكي جذور المعادلة المساعدة الناتجة عن المعادلة التفاضلية لاستجابته ، و هي تحدد طبيعة الحالة العابرة للاستجابة . من جهة أخرى ، تمثل القيم الذاتية في نظرية التحكم الآلي أقطاب النظام الديناميكي ، و تحدد من خلال حساب جذور تابع النقل الذي يربط بين خرج النظام و الدخل المطبق . يعتبر تحديد الاستجابة الخطوية للنظم الديناميكية من أهم الخطوات اللازمة لتحديد طبيعة النظام و شكل استجابته لإشارات دخل مختلفة ، حيث تحدد هذه الاستجابة من خلال مجموعة من البارامترات الأساسية كما هو مبين في الشكل 1 .



الشكل 1. بارامترات الاستجابة الخطوية لنظام مرتبة ثانية

و أهمها : [1]

- زمن التجاوز الأعظمي t_p : و هو الزمن اللازم للوصول إلى أعلى قمة في منحنى الاستجابة .
- النسبة المئوية للتجاوز الأعظمي M_p : و هي النسبة المئوية لمطال أعلى قمة مقاساً من القيمة المستقرة للاستجابة إلى مقدار هذه القيمة المستقرة .
- زمن الاستقرار t_s : و هو الزمن اللازم لكي تصل استجابة النظام إلى نسبة (95% - 98%) من القيمة المستقرة النهائية .

هناك ثلاثة أنماط أساسية لشكل استجابة النظام الديناميكي تبعاً لطبيعة أقطابه ، كما هو مبين في الشكل 2 . [2]

$$P_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm i \omega_d$$

يمكن بمساعدة العلاقات الرياضية للبارامترات المميزة للاستجابة إعادة صياغة علاقة الأقطاب بدلالة t_p و t_s كما يلي:

$$P_{1,2} = -\frac{4}{t_s} \pm i \frac{\pi}{t_p}$$

كما يمكن إعادة صياغة علاقة الأقطاب بدلالة M_p و t_s كما يلي:

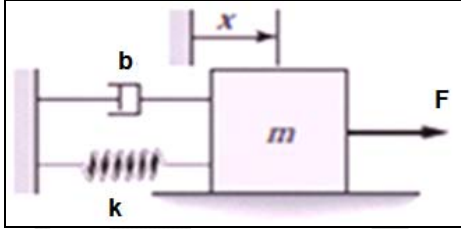
$$P_{1,2} = -\frac{4}{t_s} \mp i \frac{4\pi}{t_s \ln(M_p)}$$

تمثل العلاقتان الناتجتان النموذج الرياضي الذي يوضح تأثير الأقطاب على شكل الاستجابة الخطوية للنظام.

III. محاكاة النموذج الرياضي لنظام كتلة نابض

مخمد

تم محاكاة العلاقتين الناتجتين على نظام ديناميكي مؤلف من كتلة m متصلة بنابض ثابت صلابته k و مخمد ثابت تخميده b ، حيث تؤثر على الكتلة قوة مقدارها F تؤدي إلى إزاحة الكتلة بمقدار x ، كما هو مبين في الشكل 3.



الشكل 3. نظام كتلة نابض مخمد

بتطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركات الانسحابية [5]:

$$m\ddot{x} = F - b\dot{x} - kx$$

بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة، و عزل الدخل و الخرج يمكن إيجاد تابع النقل التالي:

$$G(s) = \frac{x(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

بالمطابقة مع الشكل القياسي لتابع النقل لنظام مرتبة ثانية يمكن تحديد البارامترات التالية:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

على الخرج المستقر من خلال حساب جداء هذا الثابت بالدخل المطبق على النظام.

ω_n [rad/s]: التردد الطبيعي غير المتخامد، و هو تردد الاستجابة في حال عدم وجود تخميد في النظام.

ζ : نسبة التخميد، و هي نسبة التخميد الفعلي في النظام إلى التخميد الحرج (التخميد الذي يصل عنده النظام إلى القيمة المستقرة بأقل زمن بدون حصول تجاوز عن القيمة المستقرة).

يمكن من خلال بعض الإجراءات الرياضية و تطبيق تحويلات لابلاس العكسية استنتاج العلاقة الزمنية للاستجابة الخطوية

(في) x(t) [4]:

$$x(t) = B.K.[1 - e^{-\zeta\omega_n t}(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t))]$$

حيث:

B : الدخل المطبق على النظام

ω_d [rad/s]: التردد الطبيعي المتخامد، و هو تردد الاستجابة في حال وجود تخميد في النظام، و يعبر عنه كما يلي:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

يمكن من خلال بعض الإجراءات الرياضية على العلاقة الزمنية للاستجابة تحديد قيم البارامترات الأساسية المميزة لها كما يلي:

[4]

$$\begin{aligned} t_p &= \frac{\pi}{\omega_d} \\ M_p &= e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \\ t_s &= \frac{4}{\zeta\omega_n} \end{aligned}$$

لإيجاد أقطاب النظام $P_{1,2}$ يجب إيجاد جذور مقام تابع النقل، أي حل المعادلة التالية:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

حيث ينتج:

$$P_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)}$$

و التي يمكن التعبير عنها بصيغة أخرى كما يلي:

% Poles using relation 1

$$s_1 = (-4/ts) + i \cdot \pi / tp$$

$$s_2 = (-4/ts) - i \cdot \pi / tp$$

% Poles using relation 2

$$s_{11} = (-4/ts) - i \cdot \pi \cdot (4/ts) / \log(Mp)$$

$$s_{22} = (-4/ts) + i \cdot \pi \cdot (4/ts) / \log(Mp)$$

بتنفيذ الكود تنتج القيم التالية :

$$wn = 2$$

$$zeta = 0.5$$

$$K = 0.25$$

$$wd = 1.7321$$

$$tp = 1.8138$$

$$Mp = 0.1630$$

$$ts = 4$$

$$\text{Pole}_1 = -1.0000 + 1.7321i$$

$$\text{Pole}_2 = -1.0000 - 1.7321i$$

$$s_1 = -1.0000 + 1.7321i$$

$$s_2 = -1.0000 - 1.7321i$$

$$s_{11} = -1.0000 + 1.7321i$$

$$s_{22} = -1.0000 - 1.7321i$$

حيث يتضح من النتائج تطابق قيم الأقطاب المحسوبة وفق العلاقة الأولى بدلالة t_s و t_p (و هي الأقطاب s_1 , s_2) مع الأقطاب المحسوبة من خلال جذور مقام تابع التحويل للنظام، (و هي الأقطاب Pole_1 , Pole_2) ، وتتطابق كذلك مع الأقطاب المحسوبة وفق العلاقة الثانية بدلالة t_s و M_p ، (و هي الأقطاب s_{11} , s_{22}) كما تنتج المحاكاة التالية المبينة في الشكل 4، والتي تمثل العلاقة الزمنية للاستجابة الخطوية للنظام.

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$$

$$K = \frac{1}{k}$$

تم تنفيذ المحاكاة من أجل القيم التالية :

$$m=1 \text{ [kg]} , b=2 \text{ [N.s/m]} , k=4 \text{ [N/m]}$$

حيث تم تصميم الكود التالي بلغة **Matlab** بمساعدة بيئة محاكاة النظم الديناميكية لحساب أقطاب النظام مباشرة من خلال حساب جذور مقام تابع النقل ، ثم حساب البارامترات المميزة للاستجابة الخطوية ، ثم تطبيق العلاقتين الناتجتين لحساب أقطاب النظام بدلالتهما ، ثم مقارنة النتائج .

$$m=1;$$

$$b=2;$$

$$k=4;$$

$$F=1;$$

$$\text{step}([F],[m \ b \ k])$$

$$\text{xlabel('Time [s]')}$$

$$\text{ylabel('Amplitude [m]')}$$

$$\text{grid}$$

$$wn = \sqrt{k/m} \text{ \% } wn: \text{undamped natural frequency}$$

$$zeta = b / (2 \cdot \sqrt{k \cdot m}) \text{ \% } zeta: \text{damping ratio}$$

$$K = 1/k \text{ \% } K: \text{steady state gain constant}$$

$$wd = wn \cdot \sqrt{1 - zeta^2} \text{ \% } wd: \text{damped natural frequency}$$

$$tp = \pi / wd \text{ \% } tp: \text{peak time}$$

$$Mp = \exp(-zeta \cdot \pi / \sqrt{1 - zeta^2}) \text{ \% } Mp: \text{max overshoot}$$

$$ts = 4 / (zeta \cdot wn) \text{ \% } ts: \text{settling time}$$

$$\text{\% Poles as roots of Denominator ([m b k])}$$

$$P = \text{roots}([m \ b \ k]);$$

$$\text{disp('Pole}_1\text{'})$$

$$\text{disp}(P(1))$$

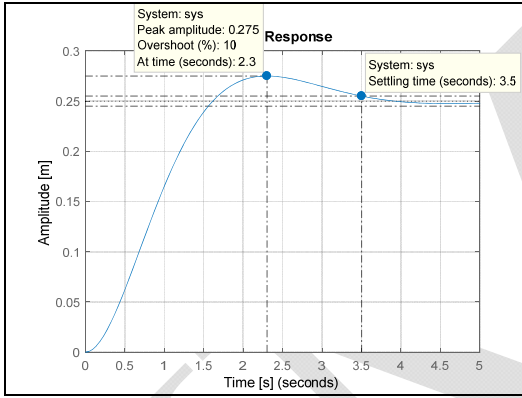
$$\text{disp('Pole}_2\text{'})$$

$$\text{disp}(P(2))$$

أما إذا كان المطلوب تقليل نسبة التجاوز الأعظمي من 0.1630 إلى 0.1 مع الحفاظ على زمن الاستقرار الأول، في هذه الحالة بتطبيق العلاقة الثانية الناتجة سابقاً تصبح الأقطاب :

$$-1 \pm 1.8644i$$

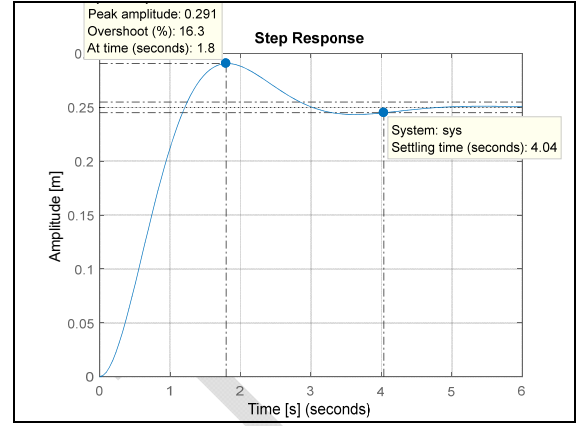
ب تنفيذ المحاكاة تنتج الاستجابة الخطوية التالية المبينة في الشكل 6، وهذا يعني أن نقل الأقطاب من الموضع الأول إلى الموضع الذي أعطته العلاقة الثانية يكافئ فعلياً تقليل مقدار التجاوز الأعظمي من 0.1630 إلى 0.1 دون تغيير في زمن الاستقرار. وبذات الطريقة المتبعة في الحالة السابقة يمكن حساب زمن التجاوز الأعظمي من العلاقة من خلال الجزء التخيلي للأقطاب، حيث يساوي في هذه الحالة 2.3



الشكل 6. محاكاة الاستجابة الخطوية في حال تعديل نسبة التجاوز الأعظمي

IV. الاستنتاجات

- 1- هناك ارتباط مباشر بين موضع الأقطاب و شكل استجابة النظام الديناميكي ، و هو ما بينته العلاقات الرياضية الناتجة .
- 2- إن ضبط استجابة النظام تعني فيزيائياً تعديل قيم بارامتراته المميزة ، و هو ما يعني رياضياً تعديل موضع الأقطاب على مستوي S المبين في الشكل 7 .

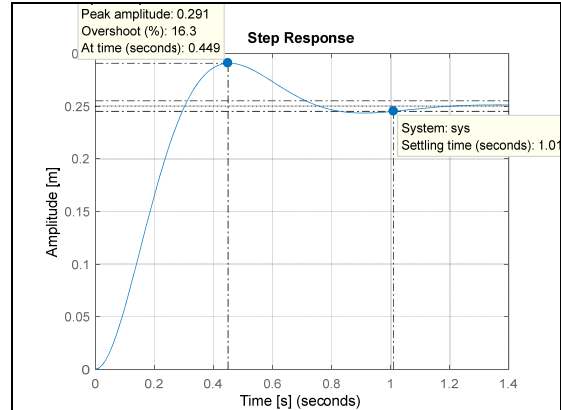


الشكل 4. محاكاة الاستجابة الخطوية لنظام كتلة نابض مخمد حيث زمن الاستقرار $t_s=4$ ، و هذا يقابل القيمة -1- للقسم الحقيقي للأقطاب. بينما مقدار التجاوز الأعظمي $M_p=0.163$ و زمن حصوله $t_p=1.8138$ ، وهذا يقابل القسم التخيلي للأقطاب 1.7321 .

بفرض أن المطلوب تقليل زمن الاستقرار من 4 إلى 1، مع الحفاظ على نسبة تجاوز أعظمي 0.1630، في هذه الحالة بتطبيق العلاقة الأولى الناتجة سابقاً تصبح الأقطاب :

$$-4 \pm 6.9274i$$

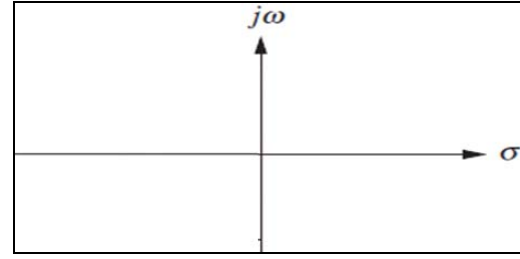
ب تنفيذ المحاكاة تنتج الاستجابة الخطوية التالية المبينة في الشكل 5، وهذا يعني أن نقل الأقطاب من الموضع السابق إلى الموضع الذي أعطته العلاقة الأولى يكافئ فعلياً تقليل زمن الاستقرار من 4 إلى 1 دون تغيير في نسبة التجاوز الأعظمي. كما يمكن حساب زمن التجاوز الأعظمي من العلاقة ذاتها من خلال الجزء التخيلي للأقطاب، حيث يساوي في هذه الحالة 0.45 .



الشكل 5. محاكاة الاستجابة الخطوية في حال تعديل زمن الاستقرار

المراجع

- [1] Ogata, K. (2010) Modern Control Engineering. 5th Edition, Pearson, Upper Saddle River.
- [2] Norman S. Nise. 2000. Control Systems Engineering (3rd. ed.). John Wiley & Sons, Inc., USA.
- [3] Lobontiu, N. (2010). System Dynamics for Engineering Students Concepts and Applications. Netherlands: Elsevier Science
- [4] Mandal Ajit K. 2006. *Introduction to Control Engineering: Modeling Analysis and Design*. New Delhi: New Age International (P) Ltd.
- [5] Rao S. S. *Mechanical Vibrations*. 5th ed. Prentice Hall 2011.



الشكل 7. مستوى S

- 3- إن زمن الاستقرار يكون أقل ما يمكن كلما كان القسم الحقيقي للقطب أكبر بالقيمة المطلقة ، أي أكثر ابتعاداً في الاتجاه السالب لمحور الأعداد الحقيقية .
- 4- الجزء التخيلي يتحكم بشكل مباشر بمقدار التجاوز الأعظمي و زمن حصوله .
- 5- تساعد النماذج الرياضية الناتجة على تحليل استراتيجية التحكم التي يجب تنفيذها لتعديل استجابة النظام .