ورقة بحثية مجلة مفتوحة الوصول

محاكاة و تحليل النظام الديناميكي الخطي و غير الخطي باستخدام Simulink في Matlab

محمد خير عبدالله محمد*

(قسم الميكاترونكس ، كلية الهندسة/جامعة المنارة ، اللاذقية–سوريا

البريد الإلكتروني : mohamad.kheir@manara.edu.sy)

الملخص

تصنف النظم الديناميكية إلى نظم خطية وهي التي تتحقق عندها فيزيائياً خاصيتا التراكب Superposition و التجانس Homogeneity ، و نظم غير خطية و هي التي لا تتحقق عندها هذه الخواص ، حيث يمكن تحديد النظم الخطية رياضياً من خلال شروط رياضية محددة في المعادلة التفاضلية لخرج النظام الديناميكي ترتبط مباشرة بالمتغير التابع و مشتقاته .

يمكن التنبؤ بأداء النظام الخطي لأنه لا يتعلق بالشروط الابتدائية المطبقة ، و بالتالي توجد تقنيات رياضيات موحدة للتعامل مع النظم الخطية ، بينما لا يمكن التنبؤ بأداء النظام غير الخطي نتيجة لارتباطه ديناميكياً بالشروط الابتدائية ، و لذلك لا توجد تقنيات رياضية موحدة يمكن من خلالها تحليل النظم غير الخطية .

تم في هذا المقال تصميم النموذج الرياضي لحركة نواس مؤلف من كرة معلقة بوصلة ، لهما كتل محددة ، و تحليل طبيعة حركة النظام كنظام خطي و غير خطي من خلال بعض الفرضيات المتعلقة بتوزع الكتل و بزاوية الإزاحة الابتدائية ، ثم تم تصميم نموذج المخطط الصندوقي Block Diagram لاختبار خاصيتي التراكب و التجانس في الحالتين الخطية و غير الخطية ، مع تنفيذ المحاكاة باستخدام أداة النمذجة و المحاكاة Simulink في Matlab بهدف تحليل النتائج ، و التحقق من تأثير الشروط الابتدائية على خرج النظام و ذلك في الحالتين الخطية و غير الخطية .

كلمات مفتاحية : نظام خطي ، نظام غير خطي ، التراكب Superposition ، التجانس Homogeneity ، نواس ، المخطط الصندوقي Block Diagram ، Simulink ، Matlab ، شروط ابتدائية .

I. مقدمة

من أجل نمذجة و تحليل النظم الديناميكية من المهم تحديد خصائص النظام و تصنيفه وفقاً لمعايير محددة ، بحيث يمكن بعدها اختيار أدوات النمذجة الملائمة لمحاكاة النظام و تحليله.

إن تحديد الطبيعة الخطية للنظام من أهم تلك الخصائص التي تساعد على فهم استجابة النظام لإشارات دخل مختلفة ، حيث تعتبر صفة الخطية معياراً أساسياً لتحديد القدرة على التنبؤ بأداء النظام مهما تكن الشروط الابتدائية .

من وجهة نظر الرياضيات التفاضلية فإن النظام الخطي هو النظام الذي تحقق المعادلة التفاضلية لخرجه ثلاث شروط ، هي: عدم وجود جداءات مشتركة بين المتغير التابع و مشتقاته في المعادلة ، و عدم وجود دوال (توابع) لا خطية للمتغير التابع و مشتقاته في المعادلة ، و عدم وجود قوة غير 1 في المتغير

التابع و مشتقاته في المعادلة ، و بالتالي فإن عدم تحقق أي شرط من هذه الشروط الثلاثة ينفي صفة الخطية عن المعادلة التفاضلية . أما من وجهة نظر الفيزياء فإن كل نظام خطي (الذي يتحقق رياضياً بتحقق الشروط الثلاثة السابقة للمعادلة التفاضلية لخرجه) هو النظام الذي يحقق خاصيتي التراكب و التجانس [1] . فإذا كانت $y_1(t)$ و $y_2(t)$ هما استجابتا نظام ديناميكي من أجل دخلين $x_1(t)$ و $x_2(t)$ على التوالي ، و كانت استجابة النظام $y_1(t)+y_2(t)$ من أجل مجموع الدخلين السابقين $x_1(t)+x_2(t)$ فإن النظام يحقق خاصية التراكب ، و التي تنص على أن استجابة نظام لمجموع دخلين هو مجموع استجابتي النظام للدخلين .

من جهة أخرى إذا كانت استجابة النظام $y(t)$ من أجل الدخل $x(t)$ ، و كانت استجابة النظام $\sum y(t)$ من أجل الدخل $\sum x(t)$ فإن هذا النظام يحقق خاصية التجانس ، و التي تنص على أن استجابة نظام لجداء دخل بمقدار محدد n هو جداء خرج ذلك الدخل بالمقدار n ذاته .

باعتبار أن النظام الخطي لا يتأثر بالشروط الابتدائية المطبقة ، لذلك يمكن تطبيق خوارزميات التحكم الأساسية للتحكم به ، أما النظام غير الخطي فيتغير خرجه كلما تغيرت الشروط الابتدائية، و لذلك لا توجد تقنيات رياضية موحدة للتعامل مع جميع النظم غير الخطية [2] ، و هو ما يجعل عملية التحكم في النظام غير الخطي عملية أكثر تعقيداً من النظام الخطي .

من المهم الإشارة إلى أن العديد من النظم غير الخطية تملك صفة الخطية في مجالات محددة خلال أدائها التشغيلي ، و لذلك كلما كانت تلك المجالات أكبر كلما كانت عمليات النمذجة و التحليل و التحكم بتلك النظم ممكنة أكثر .

II. تصميم نموذج المخطط الصندوقي لمحاكاة خاصيتي التراكب و التجانس في النواس

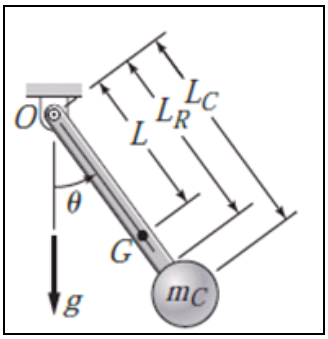
من أجل النواس المبين في الشكل 1 ، و المزاح عن وضع اتزانه الشاقولي بإزاحة زاوية ابتدائية θ ، حيث :

m_C كتلة الكرة المركزة في مركز ثقلها ، و L_C بعد مركز ثقلها عن نقطة التعليق .

m_R كتلة الوصلة المركزة في مركز ثقلها (منتصف طول الوصلة) ، و L_R طول الوصلة ، و I_{RG} عزم عطالة الوصلة حول مركز ثقلها .

L هو بعد مركز ثقل النواس G (الكرة و الوصلة معاً) عن نقطة التعليق .

m مجموع كتلتي الكرة و الوصلة .



الشكل 1: شكل توضيحي للنواس

للوصول إلى معادلة الحركة يمكن استخدام قانون نيوتن الثاني في الحركات الدورانية [3] :

$$I_o\ddot{\theta} = -mgLsin\theta$$

حيث عزم العطالة الكلي I_o يمكن حسابه كما يلي :

$$I_o = I_{RG} + m_R\left(\frac{L_R}{2}\right)^2 + m_cL_c^2$$

بفرض كتلة الوصلة مهملة ، و الإزاحة الزاوية الابتدائية θ_0 صغيرة ، أي :

$$sin\theta \approx \theta$$

بالتعويض :

$$L\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

يمكن حل هذه المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية تحليليا [4] بعد حساب القيم الذاتية λ ، فينتج :

$$(L\lambda^2 + g)e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 = -\frac{g}{L} \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{L}}$$

و يكون شكل الحل العام للمعادلة :

$$\theta = e^0\left(A\cos\sqrt{\frac{g}{L}}t + B\sin\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)$$

بالتعويض بالشروط الابتدائية يمكن إيجاد الثوابت A و B كما يلي :

$$\theta(t=0)=\theta_0 \theta_0 = A$$

$$\theta^{''} = -A\sqrt{\frac{g}{L}}sin\sqrt{\frac{g}{L}}t + B\sqrt{\frac{g}{L}}cos\sqrt{\frac{g}{L}}t$$

$$\theta^{''}(t=0)=\theta_0^{''}$$

$$\theta_0^{''} = B\sqrt{\frac{g}{L}} B = \frac{\theta_0^{''}}{\sqrt{\frac{g}{L}}}$$

بالتعويض في علاقة الإزاحة الزاوية :

$$\theta = \theta_0\, cos\sqrt{\frac{g}{L}}t + \frac{\theta_0^{''}}{\sqrt{\frac{g}{L}}} sin\sqrt{\frac{g}{L}}t)$$

و هو الحل النهائي للمعادلة التفاضلية للنواس ، و الذي يمثل المعادلة الزمنية للإزاحة الزاوية للنواس .

من الحل يتضح أن التردد الزاوي للإزاحة الزاوية يعطى بالعلاقة:

$$w = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

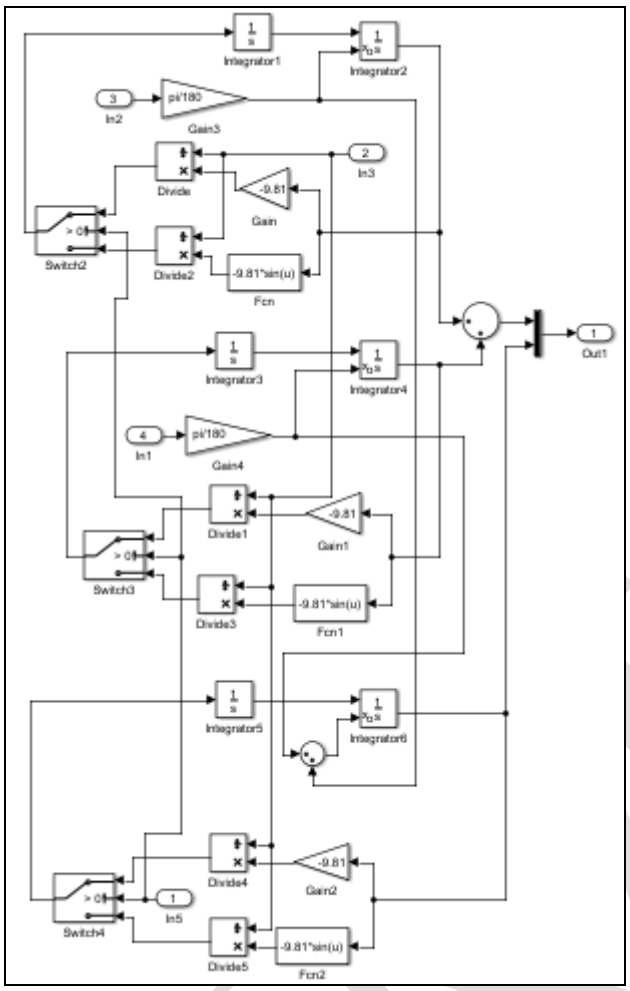
يمكن من خلال أداة النمذجة و المحاكاة Simulink في Matlab تصميم نموذج مخطط صندوقي لحل المعادلة التفاضلية للإزاحة الزاوية ، و اختبار خاصيتي التراكب و التجانس ، و ذلك في حالتين :

الحالة الأولى : نظام غير خطي أي بوجود sinθ في المعادلة التفاضلية للحركة .

الحالة الثانية : نظام خطي بجعل الإزاحة الزاوية الابتدائية صغيرة ، حيث يعوض عن sinθ بالزاوية θ في المعادلة .

تمت المحاكاة بفرض طول النواس 1 [m]

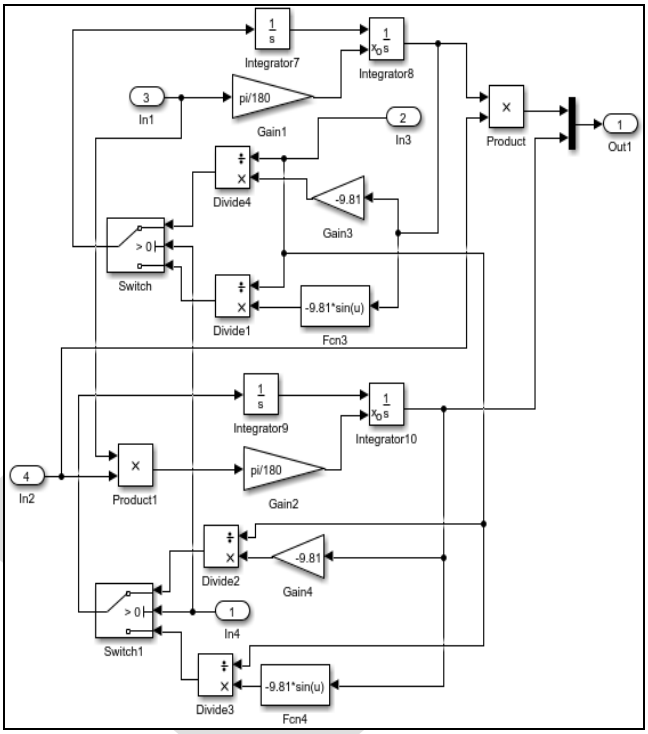
يبين الشكل 2 نموذج مخطط صندوقي لمحاكاة خاصية التراكب باستخدام Simulink .



الشكل 2 : نموذج المخطط الصندوقي لمحاكاة خاصية التراكب

حيث يقوم النموذج بمحاكاة الإزاحة الزاوية الناتجة بشكل منفصل من أجل قيمتين مختلفتين للإزاحة الزاوية الابتدائية ، ثم يجمع الإزاحتين الزاويتين الناتجتين ، كما يقوم بشكل متزامن بمحاكاة الاستجابة من أجل مجموع قيمتي الإزاحة الزاوية الابتدائية ، و يعرض عمليتي المحاكاة على الاحداثيات ذاتها .

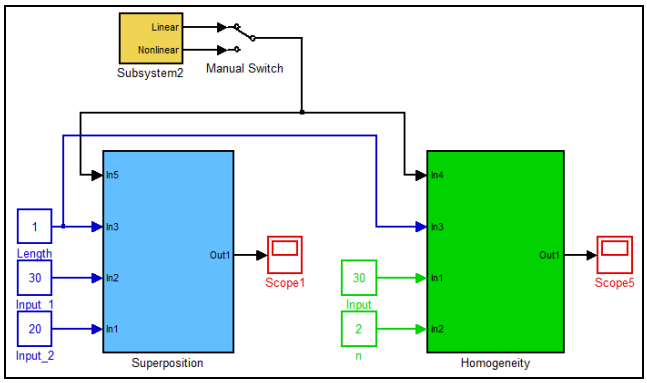
أما نموذج المخطط الصندوقي لمحاكاة خاصية التجانس باستخدام Simulink فهو مبين في الشكل 3 .



الشكل 3 : نموذج المخطط الصندوقي لمحاكاة خاصية التجانس

حيث يقوم النموذج بمحاكاة الإزاحة الزاوية الناتجة من أجل دخل محدد للإزاحة الزاوية الابتدائية ، ثم يعرض منحني جداء الاستجابة بقيمة محددة n ، كما يقوم بشكل متزامن بمحاكاة الاستجابة من أجل جداء الإزاحة الزاوية الابتدائية بالقيمة n ، و يعرض عمليتي المحاكاة على الاحداثيات ذاتها .

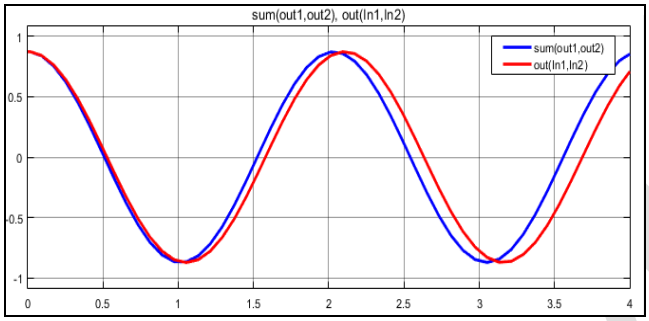
يتيح النموذجان تنفيذ عمليات المحاكاة في حالة النظام الخطي و غير الخطي ، كما هو مبين في الشكل 4 .



الشكل 4 : واجهة النموذج

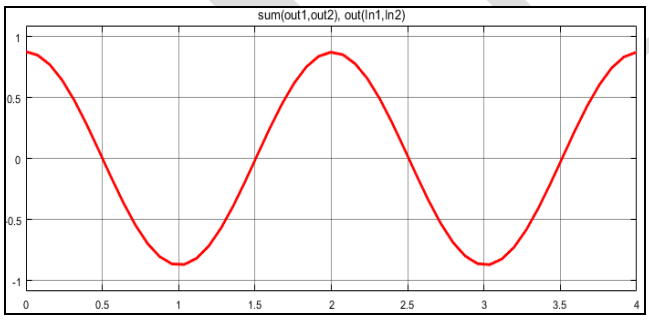
III. نتائج المحاكاة

من أجل قيمتين للإزاحة الزاوية الابتدائية 30 درجة و 20 درجة: يبين الشكل 5 نتيجة محاكاة خاصية التراكب في حالة النظام غير الخطي (المحور الأفقي يمثل الزمن [s] ، و المحور الشاقولي يمثل الإزاحة الزاوية [rad]) ، حيث توضح المحاكاة عدم تطابق مجموع خرجي الإزاحتين الزاويتين الابتدائيتين (المنحني باللون الأحمر) مع خرج مجموع الإزاحتين الزاويتين الابتدائيتين (المنحني باللون الأزرق) ، و هذا يعني عدم تحقق خاصية التراكب .



الشكل 5 : محاكاة خاصية التراكب في حالة النظام غير الخطي

يبين الشكل 6 نتيجة محاكاة خاصية التراكب في حالة النظام الخطي ، حيث توضح المحاكاة تطابق المنحنيين ، و هذا يعني تحقق خاصية التراكب .

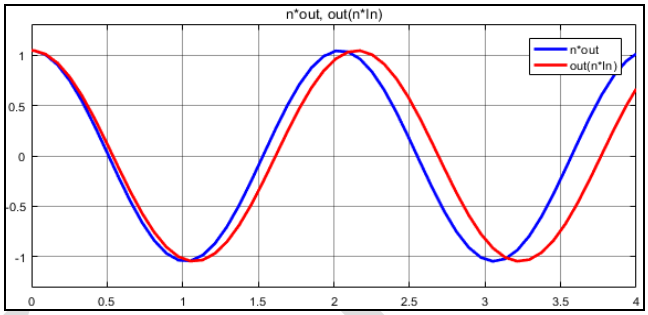


الشكل 6 : محاكاة خاصية التراكب في حالة النظام الخطي

من أجل إزاحة زاوية ابتدائية 30 درجة ، و n=2 :

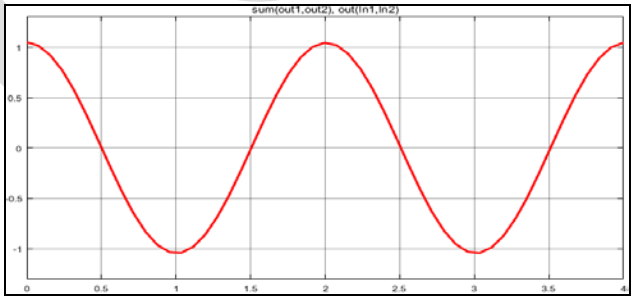
يظهر الشكل 7 نتيجة محاكاة خاصية التجانس في حالة النظام غير الخطي ، حيث توضح المحاكاة عدم تطابق مجموع خرجي

الإزاحتين الزاويتين الابتدائيتين (المنحني باللون الأحمر) مع خرج مجموع الإزاحتين الزاويتين الابتدائيتين (المنحني باللون الأزرق) ، و هذا يعني عدم تحقق خاصية التجانس .



الشكل 7: محاكاة خاصية التجانس في حالة النظام غير الخطي

يظهر الشكل 8 نتيجة محاكاة خاصية التجانس في حالة النظام الخطي ، حيث توضح المحاكاة تطابق المنحنيين ، و هذا يعني تحقق خاصية التجانس .



الشكل 8 : محاكاة خاصية التجانس في حالة النظام الخطي

يمكن من خلال نتائج المحاكاة لخاصيتي التراكب و التجانس في الحالة الخطية (الشكلان 6 و 8) حساب التردد الزاوي من خلال حساب الدور T بيانياً ، حيث : T≈2[s] ، و بالتالي :

$$w = \frac{2\pi}{T} = 3.14[\frac{rad}{s}]$$

و لكن من النموذج الرياضي للحركة فإن التردد الزاوي يمكن حسابه كما يلي :

$$w = \sqrt{\frac{g}{L}} = 3.13[\frac{rad}{s}]$$

و هذا يوضح تطابق النتائج ، و هذا النتيجة تبقى نفسها في الحالة الخطية أياً تكن الإزاحة الزاوية الابتدائية .

أما في الحالة غير الخطية فإن هذه القيمة تختلف كلما اختلفت الشروط الابتدائية ، و هذا يتضح من نتائج محاكاة خاصيتي التراكب و التجانس في الحالة غير الخطية (الشكلان 5 و 7) .

IV. الاستنتاجات

1- يمكن من خلال المحاكاة التحقق من خاصية التراكب و التجانس في النظم الديناميكية .

2- تبين المحاكاة أن خاصيتي التراكب و التجانس تتحقق في النظم الخطية و هي النظم التي تحقق معادلاتها التفاضلية شروط المعادلة التفاضلية الخطية الثلاث (لا جداءات مشتركة بين المتغير التابع و مشتقاته ، و لا توابع غير خطية في المتغير التابع و مشتقاته ، و لا قوة غير 1 مرفوع لها المتغير التابع و مشتقاته) .

3- يمكن من خلال المحاكاة التحقق من القدرة على التنبؤ بأداء النظام الخطي من خلال ملاحظة عدم تغير السلوك الديناميكي بتغير الشروط الابتدائية ، و هو ما لا يتحقق في النظام غير الخطي الذي يرتبط خرجه بالشروط الابتدائية المطبقة ، و يتغير كلما تغيرت .

4- تفيد المحاكاة في التحقق من أداء النظام الخطي و غير الخطي و إجراء الاختبارات اللازمة قبل التنفيذ .

المراجع

[1] Sen, Powers., Lecture notes on Mathematical Methods (2012). Notre Dame, Indian, USA

[2] Chaturvedi, D. (2017). Modeling and Simulation of Systems Using MATLAB and Simulink. 10.1201/9781315218335.

[3] Lobontiu,N.(2010). System Dynamics for Engineering Students: Concepts and Applications.Netherlands:Elsevier Science.

[4] Ahmad, Shair & Ambrosetti, Antonio. (2014). A Textbook on Ordinary Differential Equations. 10.1007/978-3-319-02129-4.