ورقة بحثية مجلة مفتوحة الوصول

تحديد بارمترات نظام مرتبة أولى من خلال نمذجة استجابته الحرة و تنفيذ المحاكاة باستخدام Matlab

محمد خير عبدالله محمد

(كلية الهندسة، جامعة المنارة ، البريد الإلكتروني: mohamad.kheir@manara.edu.sy)

الملخص

تعطي الاستجابة الحرة لنظام ديناميكي مؤشرات هامة حول أدائه ، و تستخدم في تحليل خرجه عند تطبيق إشارات دخل مختلفة . كما أنها تفيد في حساب البارمترات المجهولة في النظام ، و ذلك باستخدام طريقة توافق المنحني Curve Fitting ، وطريقة المربعات الأدنى Least Squares Method .

تم في هذا المقال عرض تقنية تحليل الاستجابة الحرة لنظام مرتبة أولى، من خلال حل المعادلة التفاضلية الخاصة باستجابته الحرة، و استخدام تقنيات توافق المنحني و طريقة المربعات الأدنى، لتحديد المستقيم الأكثر دقة على الاحداثيات نصف اللوغاريتمية (المحور الأفقي عادي، و المحور الشاقولي لوغاريتمي) و التي تظهر الاستجابة عليها بشكل مستقيم باعتبار العلاقة الزمنية للاستجابة علاقة أسية طبيعية، و هو ما يفيد في إيجاد البارامتر المجهول في النظام من خلال تحليل العلاقة بين ميل المستقيم الناتج على الاحداثيات نصف اللوغاريتمية و الثابت الزمني τ للنظام . كما تمت الاستفادة من أدوات نمذجة البيانات في بيئة Matlab لمحاكاة النموذج، و تنفيذ الحسابات المطلوبة بدقة .

كلمات مفتاحية: الاستجابة الحرة ، توافق المنحني Curve Fitting، طريقة المربعات الأدنى Least Squares Method، نظام مرتبة أولى، احداثيات نصف اللوغاريتمية، الثابت الزمني، Matlab .

I. مقدمة

تستخدم طرق توافق المنحني Curve Fitting في إيجاد العلاقة الرياضية التقريبية لمجموعة بيانات تمثل خرج نظام ما، حيث يتم أولاً التركيز على طبيعة الخرج عند نقطة المبدأ (إن وجدت) باعتبارها مؤشر هام لإعطاء تقدير أولي حول طبيعة العلاقة الرياضية، يلي ذلك محاولة تقريب البيانات إلى علاقة مستقيم ضمن نظام إحداثيات عادي أو لوغاريتمي أو نصف لوغاريتمي بعد تحليل شكل العلاقة التقريبي المرجح ، و من أجل إنجاز هذه العملية التقريبية تستخدم عدة طرق، أشهرها طريقة المربعات الأدنى Least Squares Method، و التي تقوم على مبدأ أن المنحني الأكثر دقة في تمثيله لمجموعة نقاط هو المنحني الذي يكون مجموع مربعات أبعاد تلك النقاط عنه أقل ما يمكن .

من جهة أخرى، إن الاستجابة الحرة لنظام ما هي استجابته بغياب إشارة دخل، و هي علاقة زمنية محددة، حيث يمكن من خلال طرق توافق المنحني تحويلها إلى علاقة مستقيم على إحدى الإحداثيات الثلاث المذكورة سابقاً ، و من ثم تطبيق طريقة المربعات الأدنى لتحديد المستقيم الأكثر دقة، مع تحديد ما تمثله بارمترات المستقيم الناتج في علاقة الاستجابة الحرة، و بالتالي تحديد البارامتر المجهول في النظام .

يتوفر في البيئة البرمجية Matlab صندوق أدوات خاص بالتعامل مع نمذجة البيانات، يمكن من خلاله تنفيذ المحاكاة للتحقق من صحة الحل، و الحصول على القيم المطلوبة .

II. تحليل الاستجابة الحرة لنظام مرتبة أولى

بفرض نظام ديناميكي من المرتبة الأولى خرجه y، حيث يمكن أن يعبر عنه بالمعادلة التفاضلية التالية [1] :

$$a\frac{dy}{dt}+by=c(t)$$

إن الاستجابة الحرة للنظام يتم الحصول عليها بحل المعادلة التفاضلية السابقة بغياب إشارة الدخل c(t) كما يلي [2] :

$$y=y_0\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{t}}{\frac{a}{\mathrm{b}}}}=y_0\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{t}}{\tau}}$$

حيث : $\tau=a/b$ الثابت الزمني للنظام [3]

و باعتبارها علاقة أسية طبيعية يمكن أخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين كما يلي:

$$lny=\ln y_0-\frac{t}{\tau}$$

و هي علاقة مستقيم ضمن الاحداثيات (t,lny)، يمكن أن يعبر عنه كما يلي:

$$y=mt+b$$

حيث $m=-1/\tau$ و $b=\ln y_0$

من أجل مجموعة نقاط n تمثل كل منها خرج محدد yi عند لحظة زمنية معينة ti يمكن استخدام طريقة المربعات الأدنى بهدف تحديد بارمترات المستقيم m و b بالدقة الأكبر، و ذلك بتطبيق العلاقات الناتجة عن الاشتقاق الجزئي لعلاقة مستقيم افتراضي بالنسبة لكل من m و b، و هذه العلاقات كالتالي [4] :

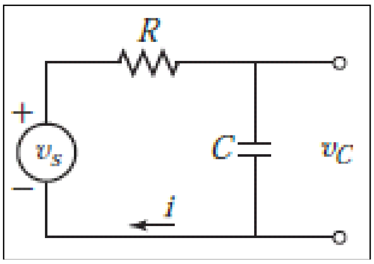
$$-\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\,2}+b\sum_{i=1}^{n}t_i=\sum_{i=1}^{n}y_i\,t_i$$

$$-\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{n}t_i+bn=\sum_{i=1}^{n}y_i$$

حيث يمكن بحل هاتين المعادلتين إيجاد الميل، و الذي يمثل مقلوب الثابت الزمني للنظام بإشارة سالبة، و بالتالي يمكن من خلال معرفة العلاقة الرمزية للثابت الزمني تحديد قيمة البارمتر المجهول في النظام .

III. حساب سعة مكثف باستخدام نمذجة الاستجابة الحرة

يمكن تطبيق التحليل السابق على الدارة الكهربائية المبينة في الشكل 1، و المكونة من منبع جهد، و مقاومة معلومة $R=10^5\ [\Omega]$ ، و مكثف سعته مجهولة [5].



الشكل 1. الدارة الكهربائية للتجربة

بفرض أنه تم فصل منبع الجهد عن الدارة، و جرى عند هذه اللحظة أخذ قراءات الجهد على طرفي المكثف في الدارة، و كانت على النحو التالي:

t (s)	V_c (V)
0	5
0.5	2.2
1	0.9
1.5	0.4
2	0.2

إن المعادلة التفاضلية لجهد المكثف بدون وجود جهد دخل على الشكل التالي:

$$\frac{dv_c}{\mathrm{dt}}=\frac{-v_c}{\mathrm{R.C}}$$

بحل هذه المعادلة ، ينتج:

$$v_c=v_c(0)\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{t}}{\mathrm{R.C}}}=v_c(0)\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{t}}{\tau}}$$

حيث تمثل هذه المعادلة الاستجابة الحرة لجهد المكثف، علماً أن $\tau=R.C$ هو الثابت الزمني .

و باعتبار الاستجابة الحرة تمثل علاقة أسية طبيعية يمكن تطبيق اللوغاريتم الطبيعي على طرفي علاقة الاستجابة:

$$lnv_c = \ln v_c(0) - \frac{t}{\tau}$$

و هي علاقة مستقيم على الاحداثيات نصف اللوغاريتمية (t,lnvc) ، حيث ميله $-1/\tau$

بالتالي، لرسم المستقيم الأكثر دقة في الإحداثيات السابقة يمكن تطبيق علاقتي طريقة المربعات الأدنى على البيانات المعطاة، فتنتج القيم التالية:

m=-1.63 b=4.86

و بالتالي يمكن حساب الثابت الزمني:

τ=0.61

و منه يمكن حساب سعة المكثف:

$$C = \frac{\tau}{R} = \frac{0.61}{10^5} = (6.14)10^{-6}\ [F]$$

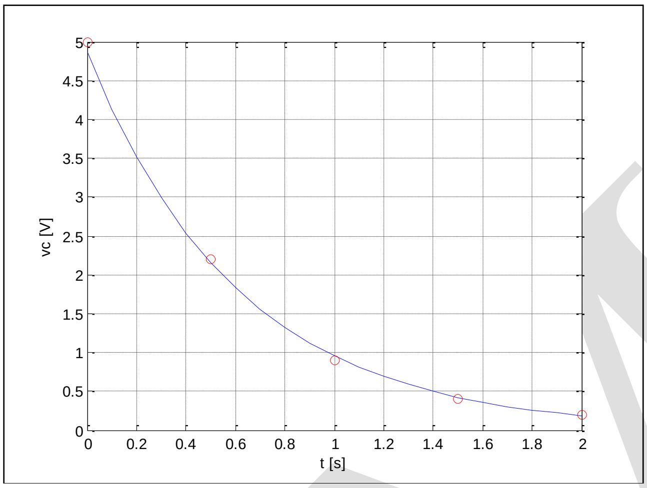
للتحقق من صحة الحل يمكن استخدام الأمر polyfit(x,y,z) لإيجاد كثير الحدود من المرتبة z الذي يعبر عن البيانات x و y، حيث يطبق هذا الأمر طريقة المربعات الأدنى .

تم تصميم الكود البرمجي التالي بلغة Matlab لحل و محاكاة مسألة إيجاد سعة المكثف وفق البيانات السابقة المعطاة .

```
time = [0:0.5:2];
voltage = [5 2.2 0.9 0.4 0.2];
logvoltage = log(voltage);
p = polyfit(time, logvoltage , 1);
m = p(1)
b = exp(p(2))
T=-1/m
C=T/(10^5)
t=0:0.1:2;
vc = b*exp(t*m);
plot(t, vc,'b', time , voltage ,'r o')
xlabel('t [s]')
ylabel('vc [V]')
grid
```

يظهر الشكل.2 نتيجة المحاكاة، حيث تمثل النقاط القراءات الفعلية لجهد المكثف، بينما يمثل المنحني العلاقة الرياضية الأسية التقريبية الأكثر دقة التي تعبر عن علاقة تغير جهد المكثف مع الزمن طبقا للبيانات المعطاة، و التي تم الحصول عليها بإعادة علاقة الخط المستقيم في الاحداثيات نصف اللوغاريتمية إلى علاقة أسية طبيعية في الاحداثيات العادية، حيث نتجت العلاقة التالية:

$$v_c = 4.864e^{-1.6285t}$$



الشكل 2. البيانات الفعلية و المنحني التقريبي لها باستخدام Matlab

حيث تظهر المحاكاة دقة العلاقة الناتجة في التعبير عن البيانات المعطاة.

IV. الاستنتاجات

1. يمثل الحل الرياضي للاستجابة الحرة أساساً مهماً لتحديد البارمترات المجهولة في النظام.
2. تساعد طرق توافق المنحني في تحديد طبيعة الاحداثيات التي تظهر عليها الاستجابة الحرة بشكل خط مستقيم.
3. يمكن من خلال طريقة المربعات الأدنى اختيار العلاقة الخطية الأكثر دقة ضمن الاحداثيات، و بإعادة العلاقة إلى شكلها الأساسي تنتج العلاقة النهائية للاستجابة.

4. بمقارنة الحل الرياضي الرمزي للاستجابة الحرة مع العلاقة الزمنية الناتجة عن طريقة المربعات الأدنى يمكن إيجاد قيم البارمترات المجهولة في النظام.
5. تظهر المحاكاة باستخدام صندوق أدوات نمذجة المنحنيات في بيئة Matlab دقة التقريب الناتج عن طريقة المربعات الأدنى في تمثيل البيانات المعطاة.
6. يمكن تطوير التحليل السابق بحيث يشمل نظم ديناميكية من رتب أعلى.
7. يمكن الاستفادة من مختلف أشكال الاستجابات لتحديد البارمترات المجهولة في النظام.

المراجع

[1]. Kelly SG. *Mechanical Vibrations: Theory and Applications*. Stamford CT: Cengage Learning; 2012.

[2]. Ahmad, Shair & Ambrosetti, Antonio. (2014). A Textbook on Ordinary Differential Equations. 10.1007/978-3-319-02129-4.

[3]. Frank, Steven A., Control Theory Tutorial: Basic Concepts Illustrated by Software Examples (June 8, 2018). SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology, 2018, Springer, Cham, Switzerland

[4]. Chakrabarty, Dhritikesh. (2014). Curve Fitting: Step-Wise Least Squares Method. AryaBhatta Journal of Mathematics & Informatics (0975 – 7139). 6.

[5]. William J. Palm III**,** System Dynamics. McGraw-Hill, 2009.