ورقة بحثية مجلة مفتوحة الوصول

محاكاة نموذج التحكم الأمثل Optimal Control بنظام ديناميكي

محمد خير عبدالله محمد

(كلية الهندسة، جامعة المنارة ، البريد الإلكتروني: mohamad.kheir@manara.edu.sy)

الملخص

تتيح نظرية التحكم الحديثة Modern control theory إمكانية تحديد الأداء المطلوب من النظام بشكل كمي، من هنا فإن ما يعرف بمؤشر الأداء performance index يمكنه حساب أو قياس أداء النظام، و هذا المؤشر ضروري لتشغيل أنظمة التحكم التكيفية الحديثة modern adaptive control systems، و تصميم الأنظمة المثلى.

يعتبر النظام نظام تحكم أمثل optimum control systems عندما يتم ضبط بارمترات النظام بحيث يصل مؤشر الأداء إلى قيم قصوى، عادة قيم أصغرية.

يمثل مؤشر الأداء برقم يأخذ عادة قيم موجبة أو صفر، و من هنا فإن النظام الأفضل هو النظام الذي يجعل رقم المؤشر أصغر ما يمكن.

في هذا المقال سيتم تصميم نموذج تحكم أمثل لنظام ديناميكي عبر جعل مؤشر الأداء يأخذ قيمة أصغرية، و تحديد بارمترات النظام اللازمة لتحقيق ذلك، و من ثم تطبيق المحاكاة باستخدام أداة Simulink في Matlab، و تحليل النتائج.

كلمات مفتاحية: نظرية التحكم الحديثة Modern control theory، مؤشر الأداء performance index، نظام تحكم أمثل optimum control systems، Matlab/Simulink.

I. مقدمة

إن تصميم نظام تحكم أمثل هي مسألة على قدر كبير من الأهمية في أنظمة التحكم الحديثة. الغرض من التصميم هنا هو تصميم نظام تحكم بمكونات تطبيقية قادرة على تحقيق الأداء التشغيلي المطلوب. الأداء المطلوب يمكن تحديده باستخدام مؤشرات الأداء في نطاق الزمن. في حالة الاستجابة العابرة و المستقرة فإن مؤشرات الأداء تحدد اسمياً في نطاق الزمن، و بالتالي من الطبيعي تنفيذ إجراءات التصميم لنظام التحكم الأمثل في نطاق الزمن.

أداء نظام التحكم يمثل بمؤشرات أداء تكاملية، و التي تم تصميم العديد منها، و بالتالي فإن تصميم النظام يجب أن يكون مبنياً على قاعدة جعل مؤشر الأداء أقل ما يمكن، مثل تكامل مربعات الأخطاء ISE (Integral of the Squared Error) [1] .

يمثل الشكل1 مبدأ حساب تكامل مربع الخطأ بين الاستجابة الفعلية y(t) و الاسمية r(t).

في هذا المقال سيتم اعتبار أن قياس متغيرات الحالة لنظام ديناميكي و كيفية استخدامها لتطوير إشارة تحكم u(t) يجري بحيث يكون أداء النظام مثالياً.

إن مؤشرات نظام التحكم بدلالة متغيرات الحالة يمكن أن يعبر عنها بالتكامل التالي[2] :

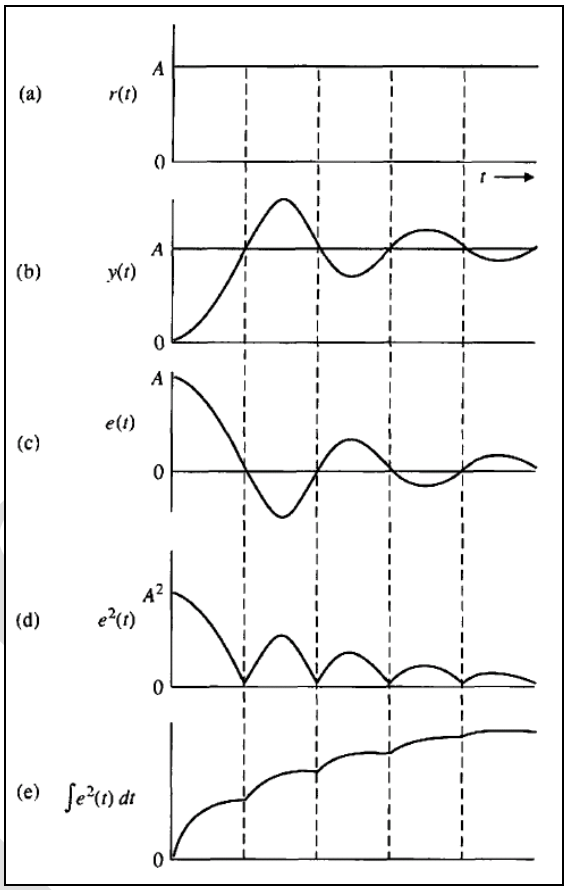
$$J = \int_0^{t_f} g(x,u,t)\,dt$$

حيث:

x: شعاع الحالة في نموذج فضاء الحالة للنظام الديناميكي

u: شعاع التحكم

tf: الزمن النهائي



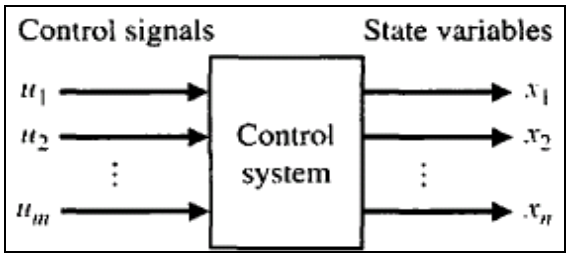
الشكل 1. مؤشر الأداء ISE

II. مبدأ التحكم الأمثل

إذا كان الغرض تقليل الخطأ في النظام فإنه إذا تم تمثيل النظام بنموذج فضاء الحالة و كان شعاع الحالة المطلوبة xd=0 عندئذ يمكن اعتبار الخطأ متطابق مع قيم شعاع الحالة في كل لحظة. سيكون المطلوب جعل النظام في حالة توازن أي x=xd=0 و بالتالي أي انحراف عن التوازن سيتم اعتباره خطأ. بناءً على ذلك سيتم تصميم نموذج تحكم أمثل باستخدام التحكم بالحالة State Feedback Control، و سيكون مؤشر الأداء عبارة عن قيم مربعات الأخطاء.

النظام الديناميكي ممثل بالشكل 2، و يعطى بالعلاقة:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$



الشكل 2. نموذج النظام الديناميكي

سيتم تصميم منظومة التحكم بتغذية راجعة بحيث يكون شعاع التحكم u تابع لمتغيرات الحالة المقاسة x أي :

$$u = -Kx$$

بالتعويض في معادلة الحالة :

$$\dot{x} = Ax - BKx = Hx$$

حيث :

H: مصفوفة مربعة

بتطبيق مؤشر الأداء المتمثل بمربعات الأخطاء، و على اعتبار أن الخطأ في هذه الحالة هو شعاع الحالة في كل لحظة، و بالتالي لتربيع كل قيمة في شعاع الحالة يكتب مؤشر الأداء بالشكل التالي [3] :

$$J = \int_0^{tf} x^T x \, dt$$

لتحقيق قيمة أصغرية لمؤشر الأداء يجب إيجاد قيمة المصفوفة المتناظرة P التي تحقق المعادلة التالية [3] :

$$\frac{d}{dt}(x^T Px) = -x^T x$$

و ذلك كما يلي:

$$\frac{d}{dt}(x^T Px) = (Hx)^T Px + x^T P(Hx)$$

$$\frac{d}{dt}(x^T Px) = x^T(H^T P + PH)x$$

إذا تم تحقيق العلاقة التالية:

$$(H^T P + PH) = -I$$

فإن المعادلة السابقة تؤول إلى الشكل:

$$\frac{d}{dt}(x^T Px) = -x^T x$$

و هي العلاقة التفاضلية التي بموجبها يكون مؤشر الأداء بقيمة أصغرية.

بالتعويض في علاقة مؤشر الأداء [3] :

$$J = \int_0^\infty -\frac{d}{dt}(x^T P x)dt = -x^T P x]_0^\infty = x^T(0)Px(0)$$

باعتبار أن النظام مستقر عند ذلك :

$$x(\infty) = 0$$

و بالتالي فإن شروط جعل مؤشر الأداء أصغرياً تتمثل بالعلاقتين التاليتين [2] :

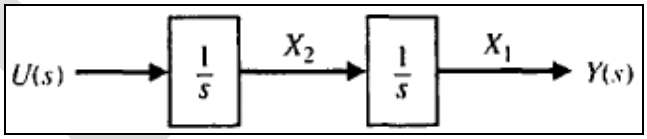
$$J = \int_0^\infty x^T x\, dt = x^T(0)Px(0)$$

$$(H^T P + PH) = -I$$

III. محاكاة نموذج التحكم الأمثل بنظام ديناميكي

بفرض نظام بدارة مفتوحة كما هو مبين في الشكل 3، حيث يتم تمثيل النظام وفق نموذج فضاء الحالة كما يلي [2] :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t)$$



الشكل 3. الدارة المفتوحة للنظام الديناميكي المعطى

و بالتالي فإن إشارة التحكم هو تابع لمتغيرات الحالة للنظام حيث:

$$u(t) = -k_1 x_1 - k_2 x_2$$

و بشكل متجهي تصبح العلاقة على الشكل التالي:

$$\dot{x} = Hx = \begin{bmatrix}0 & 1\\-k_1 & -k_2\end{bmatrix}x$$

فإذا كان k1=1 ، تصبح المهمة تحديد قيمة k2 التي تجعل قيمة مؤشر الأداء أصغرية .

بتطبيق العلاقة الأولى لتصميم نظام بمؤشر أداء أصغري:

$$(H^T P + PH) = -I$$

ينتج:

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & -k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\p_{12} & p_{22}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & -k_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

بالحل :

$$p_{12} = \frac{1}{2}$$

$$p_{22} = \frac{1}{k_2}$$

$$p_{12} = \frac{{k_2}^2 + 2}{2k_2}$$

بتطبيق العلاقة الثانية لمؤشر الأداء :

$$J = x^T(0)Px(0)$$

و بفرض شعاع الشروط الابتدائية

$$x^T(0) = [1,1]$$

بالتعويض في علاقة مؤشر الأداء:

$$J = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = p_{11} + 2p_{12} + p_{22}$$

بتعويض عناصر المصفوفة P:

$$J = \frac{{k_2}^2 + 2}{2k_2} + 1 + \frac{1}{k_2} = \frac{{k_2}^2 + 2k_2 + 4}{2k_2}$$

بجعل مؤشر الأداء أصغرياً كتابع للمقدار k_2 ، و بالاشتقاق و المساواة بـ 0:

$$\frac{dJ}{dk_2} = \frac{2k_2(2k_2+2) - 2({k_2}^2 + 2k_2 + 4)}{(2k_2)^2} = 0$$

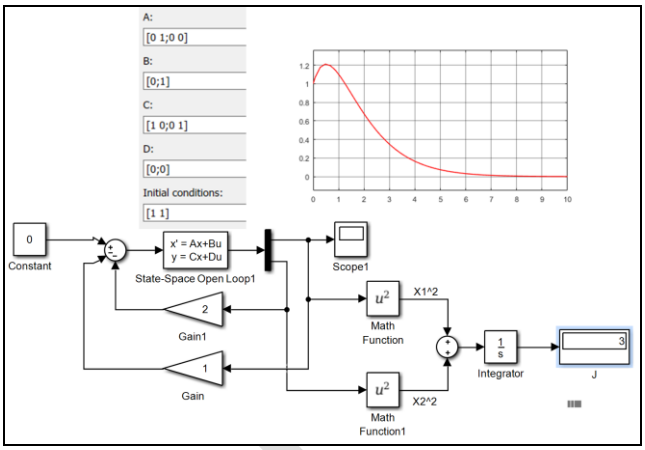
بالحل ينتج : $k_2=2$ ، و بالتعويض : $J_{min}=3$

و تكون المصفوفة H:

$$H = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & -2\end{bmatrix}$$

و بهذا يصبح مؤشر الأداء أصغرياً .

تم تنفيذ المحاكاة باستخدام Simulink في Matlab كما هو مبين في الشكل 4.



الشكل 4. نموذج محاكاة التحكم الأمثل بالنظام باستخدام Simulink

تعطي المحاكاة القيمة الأصغرية لمؤشر الأداء التي تم حسابها رياضياً.

و توضح المحاكاة بأن أي قيمة أخرى لـ k_2 سينتج عنها J>3

IV. الاستنتاجات

1. في نظرية التحكم الأمثل يقاس الأداء كمياً باستخدام مؤشرات الأداء.
2. هناك عدة مؤشرات أداء يتم تطبيقها في نظم التحكم المثلى ، من أهمها تكامل مربعات الأخطاء.
3. عند التطبيق العملي للتحكم الأمثل يجب جعل قيم مؤشر الأداء أصغر ما يمكن.
4. عند التصميم الحسابي لنظام تحكم أمثل يجب تحديد ثوابت الكسب التي تجعل إشارة التحكم تصل بالخرج إلى استجابة محددة يكون مؤشر الأداء عندها أصغرياً.
5. هناك معادلتين أساسيتين عند تصميم نظام تحكم أمثل:

$$J = \int_0^\infty x^T x \, dt = x^T(0) P x(0)$$

$$(H^T P + P H) = -I$$

بتطبيقهما يمكن حساب المصفوفة H التي تمثل مصفوفة الحالة للنظام الخاضع للتحكم و ذلك بعد حساب ثوابت الكسب لمتغيرات الحالة.

6. تبين المحاكاة باستخدام Simulink صحة القيم الناتجة بالحسابات الرياضية، و عند إدخال قيم أخرى ستكون قيم مؤشر الأداء أكبر من القيمة المحسوبة.
7. يمكن تطبيق تقنية التحكم الأمثل في مختلف نظم التحكم الحديثة التي تأخذ بعين الاعتبارات معايير أخرى تتعلق بمقدار الخطأ أو بالطاقة المستهلكة.

المراجع:

[1]. Kealy, T.,O'Dwyer, A.:Analytical ISE Calculation And Optimum Control System Design.Irish Signals and Systems Conference, University of Limerick, Ireland, 2003.
[2]. Richard C. Dorf and Robert H. Bishop. 2000. Modern Control Systems (9th. ed.). Prentice-Hall, Inc., USA.
[3]. Ogata, K. (2010) Modern Control Engineering. 5th Edition, Pearson, Upper Saddle River.