ورقة بحثية مجلة مفتوحة الوصول

محاكاة نموذج التحكم بالحالة State Feedback Control

محمد خير عبدالله محمد

(قسم الميكاترونكس ، كلية الهندسة ، جامعة المنارة البريد الإلكتروني: mohamad.kheir@manara.edu.sy)

الملخص

يعد نموذج فضاء الحالة State Space Model أحد الأسس الهامة التي نشأت عليها نظرية التحكم الحديثة Modern Control Theory ، حيث يعتبر التحكم بالحالة State Feedback Control من المحاور الرئيسية في هذه النظرية . من التقنيات المهمة في التحكم بالحالة هو التحكم بموضع الأقطاب Pole Placement Control ، و ذلك بهدف الوصول إلى شكل الاستجابة المطلوبة للنظام الديناميكي ، و هو ما يتطلب وجود حساسات لكل متغيرات الحالة التي تؤخذ بعين الاعتبار للحصول على الأقطاب المطلوبة للنظام في الدارة المغلقة .

في هذا المقال تم عرض النموذج الرياضي للتحكم بالحالة من خلال التحكم بموضع الأقطاب ، و ذلك من خلال حساب مصفوفة كسب التحكم بالحالة State Feedback Gain Matrix التي تعني تطبيقياً إمكانية التحكم باستجابة النظام باستخدام متحكمات تناسبية Proportional Controller فقط ، و هو ما يقلل من تعقيد منظومة التحكم و متطلبات معايرة المتحكمات . تم تنفيذ المحاكاة الحاسوبية باستخدام المخططات الصندوقية Block Diagrams في أداة Simulink في Matlab لنظام ديناميكي معطى بنموذج تابع التحويل Transfer Function ، حيث أعطت المحاكاة نتائجاً تؤكد الوصول إلى الأقطاب المطلوبة ، و هو ما يعني الحصول على الاستجابة المطلوبة من النظام .

كلمات مفتاحية : نموذج فضاء الحالة State Space Model ، نظرية التحكم الحديثة Modern Control Theory ، التحكم بالحالة State Feedback Control ، التحكم بموضع الأقطاب Pole Placement Control ، مصفوفة كسب التحكم بالحالة Feedback Gain Matrix ، محاكاة ، Matlab

I. مقدمة

نتج عن نظرية فضاء الحالة State Space في نمذجة النظم الديناميكية مفاهيم مهدت الطريق لنشوء نظرية التحكم الحديثة Modern Control Theory و التي تتناول بشكل رئيسي التعامل مع الأنظمة متعددة المتغيرات Multivariables بطرق محددة تقلل الاعتماد على المتحكمات التكاملية و التفاضلية على وجه التحديد .

يعتبر مفهوم التحكم بالحالة State Feedback Control أحد العناصر الرئيسية في نظرية التحكم الحديثة [1] حيث قدم Kalmann عام 1960 مفهوم قابلية التحكم Controllability و التي لعبت دوراً بارزاً في التحكم بالنظم متعددة المتغيرات [2] .

يوصف أي نظام ديناميكي بأنه قابل للتحكم إذا كان هناك متجه تحكم u(t) يمكن أن ينقل النظام من أي حالة ابتدائية $x_0(t)$ إلى أي حالة نهائية x(t) خلال فاصل زمني محدد .

بفرض نظام ديناميكي من الرتبة n ، يخضع لإشارات دخل عددها r ، و له استجابات عددها m ، يمكن تمثيل النظام باستخدام نموذج فضاء الحالة بالشكل التالي [3] :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

حيث :

x : شعاع الحالة أبعاده (n,1)

A : مصفوفة الحالة أبعادها(n,n)

B : مصفوفة الدخل أبعادها (n,r)

u : شعاع الحالة أبعاده (r,1)

y : شعاع الخرج أبعاده (m,1)

C : مصفوفة الخرج أبعادها (m,n)

D : مصفوفة الانتقال المباشر (m,r)

الشرط الكافي ليكون النظام قابلاً للتحكم بشكل تام هو أن تكون المصفوفة المربعة n×n التالية :

$$M = [B{:}AB{:}..A^{n-1}B]$$

تحوي على n سطر (أو عمود) مستقلة خطياً أي أن رتبة (rank) هذه المصفوفة n [3] .

هذا يتيح المجال للبحث عن تقنيات تحقق عملية نقل النظام من حالة ابتدائية إلى حالة نهائية ، و من هنا كان مفهوم التحكم بموضع الأقطاب Pole Placement Control .

II. تصميم نظام التحكم بالحالة بتغيير موقع الأقطاب

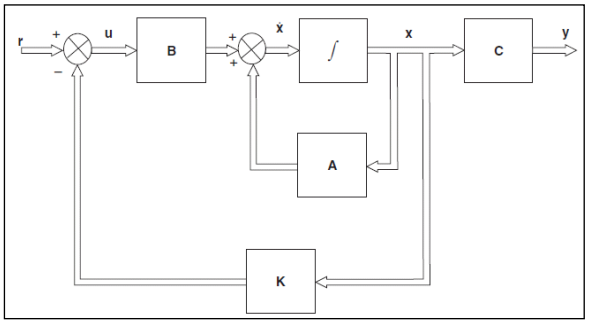
بفرض نظام ديناميكي كما هو مبين في الشكل 1 معطى بنموذج فضاء الحالة كما يلي :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

مع دخل تحكمي على النظام معطى كما يلي :

$$u = -Kx$$



الشكل 1. مخطط التحكم بالحالة لنموذج فضاء الحالة [3]

بالتعويض في نموذج فضاء الحالة للنظام :

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx)$$

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

حيث $(A - BK)$ مصفوفة الحالة للنظام في الحلقة المغلقة .

إن جذور المعادلة $|(sI - A)| = 0$ هي القيم المميزة eigenvalues (الأقطاب) للدارة المفتوحة [3] .

بينما جذور المعادلة $|(sI - A + BK)| = 0$ هي القيم المميزة (الأقطاب) للدارة المغلقة [3] .

تقتضي طريقة التحكم بموضع الأقطاب تحديد قيم المصفوفة K التي تعطي الأقطاب المطلوبة للنظام في الدارة المغلقة .

عند تصميم نظام التحكم بالحالة فإن إشارة الدخل التحكمي يعبر عنها كعلاقة خطية تربط بين متغيرات الحالة للنظام كما يلي : [3]

$$u(t) = -k_1x_1(t) - k_2x_2(t) \dots -k_nx_n(t) = -Kx(t)$$

فإذا كان موضع أقطاب الدارة المغلقة :

$$s_1 = \mu_1, s_2 = \mu_2 \dots s_n = \mu_n$$

بالتعويض في معادلة القيم المميزة للنظام في الدارة المغلقة [4] :

$$|sI - A + BK| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n)$$

$$= s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

حيث α : معاملات المعادلة المميزة للأقطاب المطلوبة للنظام في الدارة المغلقة .

و بالتالي بحل هذه المعادلة تنتج قيم المصفوفة K .

III. محاكاة نموذج نظام التحكم بالحالة

تم تطبيق المحاكاة على نظام ديناميكي يعطي كتابع تحويل (نقل) في الدارة المفتوحة كما يلي :

$$\frac{Y}{U}(s) = \frac{1}{s^2 + 4s}$$

و بفرض أن النظام في الدارة المغلقة يجب أن يملك القطبين التاليين :

$$s_1 = -2, s_2 = -2$$

بتحويل النظام من نموذج تابع التحويل إلى نموذج فضاء الحالة حيث تصبح المعادلة التفاضلية للنظام كما يلي :

$$\ddot{y} + 4y = u$$

بفرض متغيرات الحالة كما يلي :

$$x_1 = y$$
$$x_2 = \dot{x_1} = \dot{y}$$

تصبح المعادلة التفاضلية للنظام بدلالة متغيرات الحالة كما يلي :

$$\dot{x_2} = -4x_2 + u$$

حيث يعبر عن نموذج فضاء الحالة للنظام بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

المعادلة المميزة للنظام في الدارة المفتوحة :

$$|sI - A| = s^2 + 4s = s^2 + a_1 s + a_0$$

حيث : $a_1=4$, $a_0=0$

المعادلة المميزة للنظام في الدارة المغلقة :

$$(s+2)(s+2)=0$$
$$s^2 + 4s + 4 = 0$$
$$s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0$$

حيث : $\alpha_1=4$, $\alpha_0=4$

و بالتالي :

$$|sI - A + BK| = s^2 + 4s + 4$$

بالتعويض في العلاقة السابقة :

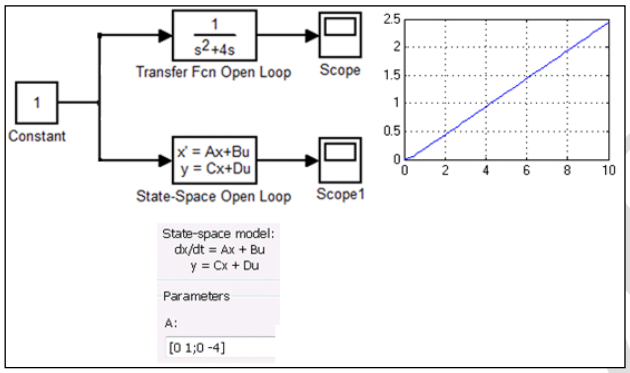
$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right| = s^2 + 4s + 4$$

بالحل ينتج : $k_1=4$, $k_2=0$

و هي قيم معاملات مصفوفة كسب التحكم بالحالة التي تمكن النظام من الوصول إلى الأقطاب المطلوبة في الدارة المغلقة .

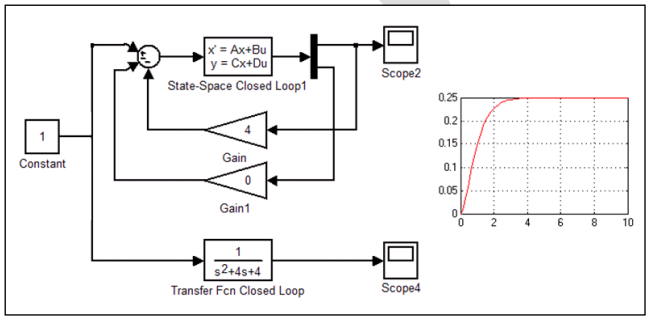
تم تطبيق المحاكاة على أداة Simulink في Matlab الذي يملك بيئة محاكاة صندوقية واسعة لمختلف النظم الديناميكية .

حيث تم أولاً محاكاة استجابة النظام في الدارة المفتوحة لكل من تابع التحويل و فضاء الحالة و كانت الاستجابة متطابقة كما هو مبين في الشكل 2 .



الشكل 2. استجابة النظام في الدارة المفتوحة لنموذجي تابع التحويل و فضاء الحالة

ثم تمت محاكاة استجابة النظام في الدارة المغلقة و ذلك على نموذج فضاء الحالة للنظام باستخدام قيم مصفوفة الكسب K ، مع محاكاة استجابة النظام كتابع تحويل له الأقطاب المغلقة المطلوبة ذاتها ، حيث يظهر الشكل 3 تطابق الخرجين (تطابق الاستجابة)



الشكل 3. استجابة النظام في الدارة المغلقة لنموذجي تابع التحويل و فضاء الحالة

و هو ما يعني أن تقنية التحكم بموضع الأقطاب أدت إلى الوصول إلى الأقطاب المطلوبة ، و بالتالي الحصول على شكل الاستجابة المطلوبة من النظام الديناميكي ، و ذلك باستخدام متحكمات تناسبية فقط .

IV. الاستنتاجات

1. نظام التحكم بالحالة يمكنه التحكم بالأنظمة متعددة المتغيرات.
2. يمكن من خلال نظام التحكم بالحالة الوصول إلى أقطاب الدارة المغلقة من خلال متحكمات تناسبية فقط .
3. نظام التحكم بالحالة يتطلب حساسات لكل متغيرات الحالة التي ستؤخذ بعين الاعتبار لدى تصميم عملية التحكم .
4. يمكن تطبيق نظام التحكم بالحالة على أي نظام مصمم كنموذج توابع تحويل بعد تحويله إلى نموذج فضاء الحالة .
5. يمكن محاكاة نظام التحكم بالحالة باستخدام Simulink الذي تتوفر فيه بيئة محاكاة جاهزة لنظام فضاء الحالة .
6. توضح المحاكاة الحاسوبية صحة الطريقة الرياضية المستخدمة للحصول على قيم مصفوفة كسب التحكم بالحالة، والتي تعطي في النهاية أقطاب الدارة المغلقة المطلوبة .

المراجع

[1]. William L. Brogan. 1991. Modern control theory (3rd ed.). Prentice-Hall, Inc., USA.
[2]. Bernhard, P.; Deschamps, M. Kalman 1960: The birth of modern system theory. *Math. Popul. Stud.* 2019, 26, 123–145.
[3]. Burns. (2001). *Advanced Control Engineering*. Elsevier Science.
[4]. Katsuhiko Ogata. 2001. Modern Control Engineering (4th. ed.). Prentice Hall PTR, USA.