

النموذج الرياضي لمبدأ معايرة متحكم تناسبي و تنفيذ المحاكاة باستخدام Matlab

محمد خير عبدالله محمد

(كلية الهندسة ، جامعة المنارة ، البريد الإلكتروني: mohamad.kheir@manara.edu.sy)

الملخص

عند تصميم دائرة تحكم بنظام ديناميكي فإن الخطوة الأولى هي تطوير نموذج رياضي للنظام يوضح الدخل و الخرج و طبيعة العلاقة بينهما. يمثل تابع النقل الناتج عن تطبيق تحويلات لابلاس على المعادلة التفاضلية الواصفة لديناميكا النظام نموذجاً أساسياً عند محاكاة النظم الديناميكية. في هذا المقال تم تصميم نموذج رياضي باستخدام تولعب النقل لعملية التحكم بنموذج مخبري لروبوت أرضي يخضع لاستراتيجية تحكم بمتحكم تناسبي ، حيث تم تحليل شكل استجابة النظام بوجود المتحكم التناسبي ، و بناءً على المهام الوظيفية للروبوت تم الوصول للعلاقات الرياضية لمعايرة المتحكم ، أي تحديد قيمة ثابت الكسب التناسبي الذي يحقق الشروط المطلوبة. تم تصميم كود برمجي بلغة Matlab لحساب ثابت الكسب و محاكاة سرعة الروبوت عند القيمة الناتجة للتحقق من بارامترات الاستجابة .

كلمات مفتاحية - دائرة تحكم ، نموذج رياضي ، تابع النقل ، تحويلات لابلاس ، روبوت ، استراتيجية تحكم ، متحكم تناسبي ، معايرة ، ثابت الكسب ، الاستجابة.

1. مقدمة

يعبر عن سلوك النظام الديناميكي بعلاقات رياضية تنتج عن تطبيق قوانين انحفاظ الطاقة و الكتلة . إذا كانت العلاقة الرياضية التالية تصف سلوك نظام ديناميكي ، و هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى :

$$a \frac{dx_o}{dt} + bx_o = cx_i$$

حيث :

 x_i دخل النظام x_o خرج النظام a, b, c : بارامترات تتعلق بديناميكا النظام

بتطبيق تحويل لابلاس على المعادلة السابقة يمكن الوصول لتابع النقل كما يلي : [1]

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{c}{as + b} = \frac{\frac{c}{b}}{1 + \frac{a}{b}s} = \frac{K}{1 + \tau s}$$

حيث :

K ثابت الكسب التناسبي ، و يمثل حاصل القسمة بين فرقي خرجين مستقرين على فرق الدخلين ، و بالتالي فإن حاصل جداء الدخل بهذا الثابت في أي نظام مرتبة أولى يعطي الخرج المستقر للنظام . [1]

T الثابت الزمني ، و هو الزمن اللازم لكي تصل استجابة النظام إلى 63.2% من القيمة المستقرة النهائية ، و هذه النسبة تنتج ببساطة من التحليل الرياضي للاستجابة الزمنية الخطوية لنظم المرتبة الأولى [1] ، و بالتالي يكون زمن استقرار الاستجابة حوالي 4 أضعاف الثابت الزمني ، حيث يعتبر النظام مستقرًا إذا أصبح مجال الخطأ بين الاستجابة و القيمة المستقرة أصغر أو يساوي 2% من القيمة المستقرة [2] .

يعد هذا التحليل تمهيداً أساسياً لنمذجة النظم الديناميكية ، و بالتالي التحكم باستجاباتها وفق استراتيجية التحكم المصممة . فإذا كان الروبوت المبين في الشكل 1 يتحرك بحركة مستقيمة انطلاقاً من وضع السكون ، حيث كتلة الروبوت m ، و يخضع لمحصلة قوى إعاقة R أثناء حركته تتناسب طردياً مع سرعته ، و ثابت التناسب k .

حيث :

v_d السرعة الاسمية (القيمة المرجعية)

e الخطأ بين القيمة الاسمية و الفعلية v

P ثابت الكسب التناسبي

من دارة التحكم يتبين بأن القوة المطبقة على الروبوت بوجود المتحكم التناسبي أصبحت تخضع للعلاقة التالية:

$$F = (v_d - v)P$$

و بالتالي بتطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركات الانسحابية في هذه الحالة :

$$mv' = (v_d - v)P - kv$$

بتطبيق تحويل لابلاس على المعادلة التفاضلية السابقة يمكن استخراج تابع التحويل بين السرعة الفعلية و السرعة الاسمية كما يلي :

$$G(s) = \frac{V(s)}{V_d(s)} = \frac{K}{1 + \tau s}$$

حيث :

$$K = \frac{P}{k + P}$$

$$\tau = \frac{m}{k + P}$$

تمثل هذه العلاقات الأساس الرياضي الذي يتم الاستناد عليه لاختيار قيمة ثابت التحكم التي تحقق شكل الاستجابة المطلوبة . فمثلاً إذا كانت المهمة الوظيفية للروبوت تتطلب معايرة المتحكم بحيث يحقق شرطين أساسيين هما :

1- أن تكون فترة إقلاع الروبوت لا تتجاوز زمناً محدداً t_{sd} حتى الوصول إلى السرعة النهائية .



الشكل 1. قوة الدفع و قوة الإعاقة على روبوت يتحرك حركة مستقيمة

من خلال قانون نيوتن الثاني في الحركات الانسحابية ينتج : [3]

$$mv' = F - kv$$

بتطبيق تحويل لابلاس على المعادلة السابقة يمكن الوصول لتابع النقل بين السرعة و القوة المطبقة كما يلي :

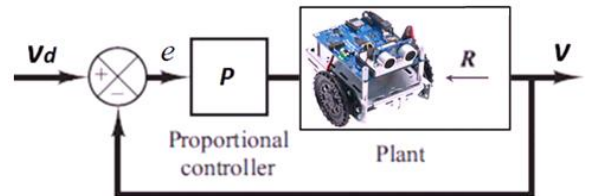
$$msV(s) = F(s) - kV(s)$$

$$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms + k}$$

سيتم الاعتماد على هذا النموذج للتحكم بسرعة روبوت باستخدام متحكم تناسبي ، و اختيار القيمة المناسبة لثابت الكسب التناسبي طبقاً للشروط المطلوبة لسرعة الروبوت .

II. النموذج الرياضي للنظام الديناميكي مع متحكم تناسبي

يبين الشكل 2 مخطط لعملية التحكم بسرعة روبوت باستخدام متحكم تناسبي .



الشكل 2. مخطط دارة التحكم بسرعة الروبوت باستخدام متحكم تناسبي

$m=10$ [kg] , $k=25$, $vd=0.02$ [m/s] , $tsd \leq 0.2$ [s] ,
 $vad \geq 0.9vd$

في هذه الحالة يمكن بالاعتماد على التحليل السابق الوصول إلى العلاقة التالية :

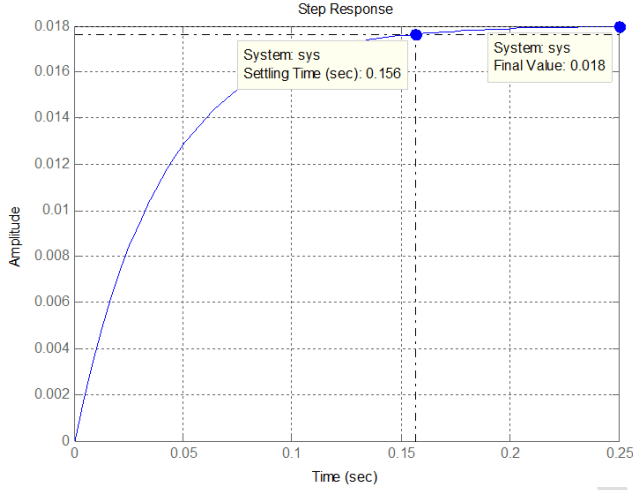
$$P = \frac{4m}{tsd} - k$$

حيث أعطى الكود عند التنفيذ قيمة ثابت الكسب : $P=225$ و هي أقل قيمة لثابت المتحكم تحقق الشروط المطلوبة المعطاة. و يظهر الشكل 3 منحنى الاستجابة (منحنى السرعة مع الزمن).

2- ألا تقل السرعة الفعلية عن قيمة محددة vad بفارق محدد عن السرعة الاسمية بنسبة مئوية منها .

أيضاً من أجل هذه الحالة يمكن الاعتماد على النماذج الرياضية السابقة لاستنتاج العلاقة التالية :

$$P = \frac{k}{\frac{vd}{vad} - 1}$$



الشكل 3. استجابة النظام بعد معايرة المتحكم

من المحاكاة يتضح بأن زمن الاستقرار 0.156 [s] و القيمة المستقرة النهائية 0.018 [m/s] و هي برامترات تحقق الشروط المطلوبة .

من هنا يتضح وجود قيمتين مختلفتين لثابت الكسب التناسبي , حيث تحقق القيمة الأولى شرط زمن الاستقرار , أما القيمة الثانية تحقق شرط القيمة المستقرة للسرعة . بالتحليل الرياضي يتبين بأن القيمة الأكبر تستطيع تحقيق الشرطين معاً. هذه العملية تمثل مبدأ معايرة المتحكم .

III. المحاكاة باستخدام لغة MATLAB

تم تصميم نموذج محاكاة لعملية المعايرة من خلال كود برمجي مبسط بلغة Matlab , حيث يقوم بحساب ثابت التحكم وفق الطريقة الرياضية السابقة , و يرسم استجابة النظام للتحقق من تلبيتها للشروط المطلوبة :

```
P1=k/((vd/vad)-1)
P2=(4*m/tsd)-k
P=max([P1 P2])
K=P/(k+P)
T=m/(k+P)
step([vd*K],[T 1])
grid
```

تم تنفيذ المحاكاة من أجل المعطيات التالية :

IV. الاستنتاجات

1. وصف النظام الديناميكي بإحدى نماذج المحاكاة مثل نموذج تابع النقل هو خطوة أساسية لتحليل استجابته و لتصميم استراتيجية التحكم المناسبة .
2. إن عملية تحليل استجابة النظام الديناميكي تحدد فيما إذا كانت تلك الاستجابة مناسبة للمهمة الوظيفية للنظام أم لا.
3. الشروط الوظيفية المطلوبة من النظام تعد معياراً أساسياً لاختيار استراتيجية التحكم المناسبة .
4. استراتيجية التحكم بمتحكم تناسبي تتطلب تحديد ثابت الكسب التناسبي الذي يحقق الشروط المطلوبة من

الاستجابة , و هذه العملية ترتبط بشكل أساسي بنمذجة النظام و تحليل بارامترات الأساسية .

5. يمكن من خلال المحاكاة الحاسوبية بلغة Matlab و بالاعتماد على النماذج الديناميكية للنظام في دارة التحكم حساب ثابت الكسب التناسبي , و رسم استجابة النظام للتحقق من تلبية الشروط المطلوبة.

المراجع

- [1]. Ogata, K. (2010) Modern Control Engineering. 5th Edition, Pearson, Upper Saddle River.
- [2]. de Silva, C. W. (2009). Modeling and Control of Engineering Systems. United States: CRC Press.
- [3]. Lobontiu, N. (2010). System Dynamics for Engineering Students: Concepts and Applications. Netherlands: Elsevier Science.